RIKEN
Center for
Computational Science

2025年8月1日

有限要素解析のための並列ソルバーに関するスクール2025

有限要素法入門

鈴木 厚[1]

[1] 理研計算科学研究センター 大規模並列数値計算技術研究チーム
atsushi.suzuki.aj@a.riken.jp

混合境界条件の Poisson 方程式と弱形式：1/2

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$

$$\begin{aligned} -\triangle u &= f \text{ in } \Omega, \\ u &= g \text{ on } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= h \text{ on } \Gamma_N. \end{aligned}$$

弱形式
V : 関数空間, $V(g) = \{u \in V\,;\, u = g \text{ on } \Gamma_D\}$. $V = C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$?
Find $u \in V(g)$ s.t.

$$\int_\Omega -\triangle u\, v dx = \int_\Omega f\, v dx \quad \forall v \in V(0)$$

部分積分に関する Gauss-Green の公式より

$u, v \in V$, $n = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$: 境界 $\partial\Omega$ に対する外向き法線ベクトル

$$\int_\Omega (\partial_i u) v\, dx = -\int_\Omega u \partial_i v\, dx + \int_{\partial\Omega} u\, n_i v\, ds\,.$$

混合境界条件の Poisson 方程式と弱形式：2/2

$$\int_\Omega (-\partial_1^2 - \partial_2^2) u\, v\, dx = \int_\Omega (\partial_1 u \partial_1 v + \partial_2 u \partial_2 v)\, dx - \int_{\partial\Omega} (\partial_1 u\, n_1 + \partial_2 u\, n_2) v\, ds$$

$$= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx - \int_{\Gamma_D \cup \Gamma_N} \nabla u \cdot n\, v\, ds$$

$$v = 0 \text{ on } \Gamma_D \Rightarrow \quad = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx - \int_{\Gamma_N} h v\, ds$$

次を満たす $u \in V(g)$ を見付けよ

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f\, v dx + \int_{\Gamma_N} h\, v ds \quad \forall v \in V(0)$$

- $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ ：双一次形式
- $F(\cdot) : V \to \mathbb{R}$ ：汎関数

次を満たす $u \in V(g)$ を見付けよ

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V(0)$$

離散化と行列表現: 1/2

有限要素基底 span$[\varphi_1, \ldots, \varphi_N] = V_h \subset V$

$u_h \in V_h \;\Rightarrow\; u_h = \sum_{1 \le i \le N} u_i \varphi_i$

有限要素節点 $\{P_j\}_{j=1}^N$, $\varphi_i(P_j) = \delta_{i\,j}$ Lagrange 要素

$\Lambda_D \subset \Lambda = \{1, \ldots, N\}$: Dirichlet 境界にある節点の添字集合
Dirichlet データ: $u(P_k) = g(P_k) \quad P_k \in \Gamma_D$

$$V_h(g) = \{u_h \in V_h \,;\, u_h = \sum u_i \varphi_i, u_k = g_k \ (k \in \Lambda_D)\}$$

次を満たす $u_h \in V_h(g)$ を見付けよ

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h(0).$$

次を満たす $\{u_j\}, u_k = g_k(k \in \Lambda_D)$ を見付けよ

$$a(\sum_j u_j \varphi_j, \sum_i v_i \varphi_i) = F(\sum_i v_i \varphi_i) \; \forall \{v_i\}, v_k = 0(k \in \Lambda_D)$$

次を満たす $\{u_j\}_{j \in \Lambda}$ を見付けよ

$$\sum_j a(\varphi_j, \varphi_i) u_j = F(\varphi_i) \qquad \forall i \in \Lambda \setminus \Lambda_D$$

$$u_k = g_k \qquad \forall k \in \Lambda_D$$

離散化と行列表現: 2/2

次を満たす $\{u_j\}_{j\in\Lambda\setminus\Lambda_D}$ を見付けよ

$$\sum_{j\in\Lambda\setminus\Lambda_D} a(\varphi_j,\varphi_i)u_j = F(\varphi_i) - \sum_{k\in\Lambda_D} a(\varphi_k,\varphi_i)g_k \quad \forall i\in\Lambda\setminus\Lambda_D$$

$A = \{a(\varphi_j,\varphi_i)\}_{i,j\in\Lambda\setminus\Lambda_D}$: 対称

$A\in\mathbb{R}^{N\times N}$, $f\in\mathbb{R}^N$, $N = \#(\Lambda\setminus\Lambda_D)$

係数行列の正定値性は双一次形式の強圧性より得られる

A : (対称) 正定値, 即ち, $(A\vec{u},\vec{u}) > 0\ \forall\vec{u}\neq 0$

証明

$$(A\vec{u},\vec{u}) = \sum_i\left(\sum_j a(\varphi_j,\varphi_i)u_j\right)u_i$$

$$= a(\sum_j \varphi_j u_j, \sum_i \varphi_i u_i) = a(u,u) \geq \alpha||u||_1^2$$

双一次形式の強圧性は Poincare's の不等式 $|u|_1^2 \geq c||u||_0^2$ より得られる

$$a(u,u) = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla u = ||\nabla u||_0^2 = |u|_1^2$$

$|u|_1^2 = ((1-\beta)+\beta)|u|_1^2 \geq c\beta||u||_0^2 + (1-\beta)|u|_1^2 = \dfrac{c}{1+c}||u||_1^2$ ($\beta = \dfrac{1}{1+c}$ととる)

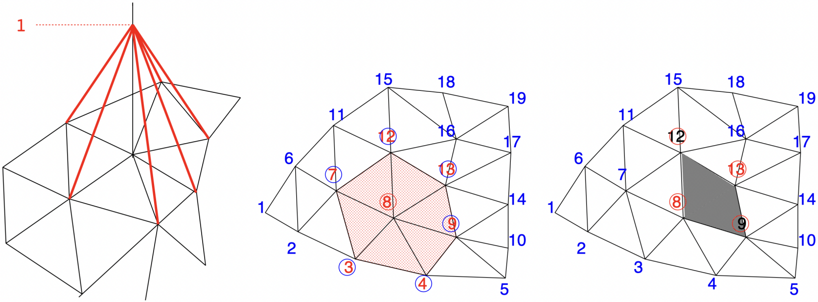
P1 有限要素と疎行列

$\mathcal{T}_h$: 領域 Ω の三角形要素 $K \in \mathcal{T}_h$ による要素分割

区分的一次要素 : $\varphi_i|_K(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$

$\varphi_i|_K(P_j) = \delta_{i\,j}$

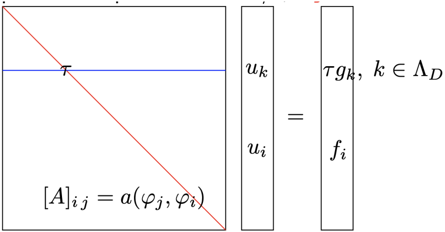
$$[A]_{i\,j} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_\Omega \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i \, dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i \, dx.$$



A : 疎行列, CRS (Compressed Row Storage) 形式によって格納する

非斉次 Drichlet 条件の問題を解くためのペナルティー法

行列 A の対角成分のうち添字集合 $k \in \Lambda_D$ の添字で示される要素を修正
ペナルティーパラメータ $\tau = 1/\varepsilon$; `tgv`



$$\tau u_k + \sum_{j \neq k} a_{k\,j} u_j = \tau g_k \;\Leftrightarrow\; u_k - g_k = \varepsilon(-\sum_{j \neq k} a_{k\,j} u_j),$$

$$\sum_j a_{i\,j} u_j = f_i \qquad \forall i \in \{1, \ldots, N\} \setminus \Lambda_D.$$

この手法は行列の添字の順番付けを変更せず行列の対称性を保つことができる.

$u_g \in V(g)$ を見付けると $u_0 + u_g \in u_g + V(0)$ により斉次 Dirichlet 境界条件の問題に帰着できる:

次を満たす $u_0 \in V(0)$ を見付けよ $a(u_0, v) = F(v) - a(u_g, v)\ \forall v \in V(0)$

抽象的弱形式

V: 内積 $(\cdot,\cdot)$ を持ち, ノルムを $||\cdot||$ と表わす Hilbert 空間
双一次形式 $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$

- 強圧性 : $\exists\alpha > 0 \quad a(u,u) \geq \alpha||u||^2\ \forall u \in V$.
- 連続性 : $\exists\gamma > 0 \quad |a(u,v)| \leq \gamma||u||\,||v||\ \forall u,\ v \in V$.

汎関数 $F(\cdot) : V \to \mathbb{R}$.

$$\text{次を満たす } u \in V \text{ を見付けよ } a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

は Lax-Milgram の定理により一意的な解を持つ

双一次形式 $a(\cdot,\cdot)$ に対する, より一般的な条件

- inf-sup 条件
  - $\exists\alpha_1 > 0 \quad \displaystyle\sup_{v\in V, v\neq 0} \frac{a(u,v)}{||v||} \geq \alpha_1||u||\ \forall u \in V$.
  - $\exists\alpha_2 > 0 \quad \displaystyle\sup_{u\in V, u\neq 0} \frac{a(u,v)}{||u||} \geq \alpha_2||v||\ \forall v \in V$.

次を満たす $u \in V$ を見付けよ $a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in V$ の問題は一意的な解を持つ.

誤差評価理論：1 /2

V : Hilbert 空間,　$V_h \subset V$: 有限要素空間

- $u \in V,\ a(u,v) = F(v)\ \ \forall v \in V$.
- $u_h \in V_h,\ a(u_h,v_h) = F(v_h)\ \ \forall v_h \in V_h \subset V$.

$a(u,v_h) = F(v_h)\ \ \forall v_h \in V_h \subset V$ より次が得られる

Galerkin 直交性　$a(u-u_h,v_h) = 0\ \ \forall v_h \in V_h$

双一次形式 $a(\cdot,\cdot)$ の強圧性と連続性を仮定する.

Céa の補題　$||u-u_h|| \le \dfrac{\gamma}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} ||u-v_h||$.

証明:
$$\begin{aligned}
\alpha||u-u_h||^2 &\le a(u-u_h,u-u_h)\\
&= a(u-u_h,u-v_h+v_h-u_h)\\
&= a(u-u_h,u-v_h)\\
&\le \gamma||u-u_h||||u-v_h||.
\end{aligned}$$

双一次形式 $a(\cdot,\cdot)$ の inf-sup 条件と連続性を仮定する.

$$\begin{aligned}
||u-u_h|| &\le ||u-v_h|| + ||u_h-v_h||\\
&\le ||u-v_h|| + \frac{1}{\alpha}\sup_{w_h}\frac{a(u_h-v_h,w_h)}{||w_h||}\\
&= ||u-v_h|| + \frac{1}{\alpha}\sup_{w_h}\frac{a(u-v_h,w_h)}{||w_h||}\\
&\le ||u-v_h|| + \frac{1}{\alpha}\sup_{w_h}\frac{\gamma||u-v_h||||w_h||}{||w_h||} = (1+\frac{\gamma}{\alpha})||u-v_h||
\end{aligned}$$

誤差評価理論：2 /2

$\Pi_h : C(\bar{\Omega}) \to V_h, \quad \Pi_h u = \sum_{1\le i\le N} u(P_i)\phi_i,$
span$[\{\phi_i\}_{1\le i\le N}] = S_h$, 有限要素基底 ϕ_i による線形包

多項式による補間誤差 $K \in \mathcal{T}_h$, $P_k(K) \subset H^l(K)$, $v \in H^{k+1}(\Omega)$
$\Rightarrow$
$\exists c > 0 \quad |v - \Pi_h v|_{s,K} \le c\, h_K^{k+1-s} |v|_{k+1,K} \ (0 \le s \le \min\{k+1, l\})$.

cf. Ern-Guermond, 2021

厳密解 $u \in H^{k+1}$ に対する P_k 要素による有限要素解 u_h の誤差
$\Rightarrow$
$\exists c > 0 \quad ||u - u_h||_{1,\Omega} \le c\, h^k |u|_{k+1,\Omega}$

証明:

$$\begin{aligned}
||u - u_h||_{1,\Omega} &\le c \inf_{v_h \in V_h} ||u - v_h||_{1,\Omega} \\
&\le c||u - \Pi_h u||_{1,\Omega} \\
&\le \tilde{c} \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (|u - \Pi_h u|_{0,K} + |u - \Pi_h u|_{1,K}) \\
&\le \check{c} \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (h_K^{(k+1)} + h_K^k)|u|_{k+1,K} \\
&\le \hat{c} h^k |u|_{k+1,\Omega}
\end{aligned}$$

Sobolev 空間

P1 有限要素空間は要素間の辺で微分値が連続とならないため $C^1(\Omega)$ に属さない

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)\,;\, ||u||_1^2 = (u,u) < +\infty\}$$

$$(u,v) = \int_\Omega u\,v + \nabla u \cdot \nabla v,$$

$$||u||_0^2 = \int_\Omega u\,u, \quad |u|_1^2 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u$$

$H_0^1 = \{u \in H^1(\Omega)\,;\, u = 0$ on $\partial\Omega\}$.
Poincaré の不等式 $\exists C(\Omega)\ u \in H_0^1 \ \Rightarrow\ ||u||_0 \le C(\Omega)|u|_1$.
証明 (正方形領域 $\Omega = (0,s)\times(0,s)$ に対して)
$v \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$v(x_1,x_2) = v(0,x_2) + \int_0^{x_1} \partial_1 v(t,x_2)dt$$

$$|v(x_1,x_2)|^2 \le \int_0^{x_1} 1^2 dt \int_0^{x_1} |\partial_1 v(t,x_2)|^2 dt \le s\int_0^s |\partial_1 v(t,x_2)|^2 dt$$

$$\int_0^s |v(x_1,x_2)|^2 dx_1 \le s^2 \int_0^s |\partial_1 v(x)|^2 dx_1$$

$$\int_\Omega |v|^2 = \int_B |\widetilde{v}|^2 dx_1 dx_2 \le s^2 \int_B |\partial_1 \widetilde{v}|^2 dx_1 dx_2 = s^2 \int_\Omega |\partial_1 v|^2.$$

数値積分

数値積分公式:
三角形要素 K での積分点 $\{P_i\}_{i\le i\le m}$ と重み $\{\omega_i\}_{i\le i\le m}$

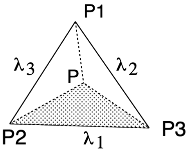
$$a(\varphi_j,\varphi_i)=\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K \nabla\varphi_j\cdot\nabla\varphi_i=\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sum_{l=1}^{m}\nabla\varphi_j(P_l)\cdot\nabla\varphi_i(P_l)\omega_l$$

$$|u-u_h|_{0,\Omega}^2=\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K|u-u_h|^2dx\sim\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sum_{l=1}^{m}|u(P_l)-u_h(P_l)|^2\omega_l$$

公式: 5-次, 7-点,

P.C. Hammer, O.J. Marlowe, A.H. Stroud [1956]

面積座標 $\{\lambda_i\}_{i=1}^3$	重み	
$(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$	$\frac{9}{40}\lvert K\rvert$	$\times 1$
$(\frac{6-\sqrt{15}}{21},\frac{6-\sqrt{15}}{21},\frac{9+2\sqrt{15}}{21})$	$\frac{155-\sqrt{15}}{1200}\lvert K\rvert$	$\times 3$
$(\frac{6+\sqrt{15}}{21},\frac{6+\sqrt{15}}{21},\frac{9-2\sqrt{15}}{21})$	$\frac{155+\sqrt{15}}{1200}\lvert K\rvert$	$\times 3$



注意
有限要素法の誤差評価を実行する際に厳密解 u を有限要素空間に補間して計算する $|\Pi_h u-u_h|_{1,\Omega}$ と誤差の値は改善されてしまっていることが多い (超収束と呼ばれる. 極端な例では双一次形式の解は補間と同じになり誤差は生じない).

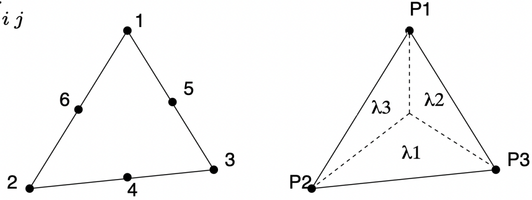
P2 有限要素

$\mathcal{T}_h$: 領域 Ω の三角形要素 $K \in \mathcal{T}_h$ による要素分割

区分的二次要素 : 三角形要素 K あたり 6 自由度

$$\varphi_i|_K(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1^2 + a_4 x_1 x_2 + a_5 x_2^2$$

$$\varphi_i|_K(P_j) = \delta_{i\,j}$$



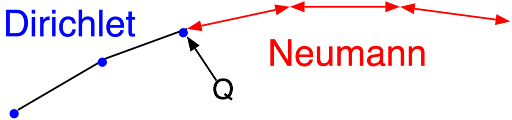
基底関数は面積座標を $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ 用いると次のように表現される

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & -1 & -1 \\ & 1 & & -1 & & -1 \\ & & 1 & -1 & -1 & \\ & & & 4 & & \\ & & & & 4 & \\ & & & & & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 \\ \lambda_2^2 \\ \lambda_3^2 \\ \lambda_2\lambda_3 \\ \lambda_3\lambda_1 \\ \lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(2\lambda_1 - 1) \\ \lambda_2(2\lambda_2 - 1) \\ \lambda_3(2\lambda_3 - 1) \\ 4\lambda_2\lambda_3 \\ 4\lambda_3\lambda_1 \\ 4\lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix}$$

混合境界付近での Neumann データの扱い

Neumann データは有限要素基底 φ_i との積の線積分で計算される

$$\int_{\Gamma_N} h\,\varphi_i\,ds$$



与えられた Neumann データ h が有限要素基底で補間されている場合
$h = \sum_j h_j \varphi_j|_{\Gamma_N}$ は次のように計算される

$$\sum_j h_j \int_{\Gamma_N} \varphi_j \varphi_i\,ds.$$

節点 $Q \in \bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_N$ では Dirichlet データと Neumann データの両方が必要.

有限要素定式化の利点

- 境界条件は部分積分の公式により導出される弱形式に自然な形で記述される
- Dirichlet 境界条件は関数空間に埋め込まれ本質的境界条件と呼ばれる
- Neumann 境界条件は Gauss-Green の公式により表面/線積分として扱われ自然境界条件と呼ばれる
- 線形方程式の可解性は連続問題の弱形式の可解性を引き継ぐ
- 有限要素解の誤差は有限要素空間の近似能力によって評価される

参考文献

- Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Elasticity Theory, 3rd ed. D. Braess Cambridge University Press, 2010
- Numerical Models for Differential Problems, 2nd ed. A. Quarteroni Springer, 2014 ISBN 978-88-470-5521-6
- Theory and Practice of Finite Elements A. Ern, J.-L. Guermond Springer, 2004 ISBN 978-1-4419-1918-2
- The Mathematical Theory of Finite Element Methods, 3rd ed. S. Brenner, R. Scott Springer, 2008 ISBN 978-0-387-75933-3
- Numerical Approximation of Partial Differential Equations A. Quartenori, A. Valli Springer, 2008

非圧縮性流体：1/2

Stokes 方程式
領域を Ω, 境界を $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, n を境界での外向き単位法線とする.
流速 u と圧力 p に対する非圧縮性条件を課す次の方程式系を考える.

$$
\begin{aligned}
-2\nabla \cdot D(u) + \nabla p &= f \text{ in } \Omega \\
\nabla \cdot u &= 0 \text{ in } \Omega \\
u &= g \text{ on } \Gamma_D \\
\sigma(u,p)n &= h \text{ on } \Gamma_N
\end{aligned}
$$

$D(u)$ は変形速度テンソル $D(u) = \dfrac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$
$u = [u_1, u_2, u_3]$ に対して,

$$
\nabla u = \begin{bmatrix} \partial_1 u_1 & \partial_2 u_1 & \partial_3 u_1 \\ \partial_1 u_2 & \partial_2 u_2 & \partial_3 u_2 \\ \partial_1 u_3 & \partial_2 u_3 & \partial_3 u_3 \end{bmatrix} = (\nabla u^T)^T
$$

変形速度テンソルの成分表示 $[D(u)]_{i\,j} = (\partial_j u_i + \partial_i u_j)/2$ から

$$
[\nabla\cdot 2D(u)]_i = \sum_j \partial_j(\partial_i u_j + \partial_j u_i) = \partial_i \sum_j \partial_j u_j + \sum_j \partial_j \partial_j u_i = [\triangle u]_i (\Leftarrow \nabla\cdot u = 0)
$$

応力は I を 3×3 の単位行列として, $\sigma(u,p) = 2D(u) - p\,I$.

Stokes 方程式の弱形式

Stokes 方程式の弱形式
流速場を求める部分集合を $V(g) = \{u \in H^1(\Omega)^3\,;\, u = g \text{ on } \Gamma_D\}$,
圧力場を求める部分空間を $Q = L^2(\Omega)$
テスト関数 $v \in V(0)$ を第一式の運動方程式の両辺に掛けて, 領域 Ω で積分する.

$$-\int_\Omega 2\,(\nabla \cdot D(u)) \cdot v + \int_\Omega \nabla p \cdot v = \int_\Omega f \cdot v$$

Gauss-Green の公式より

$$\begin{aligned}
&-\textstyle\int_\Omega \sum_i \sum_j \partial_j(\partial_i u_j + \partial_j u_i) v_i + \int_\Omega \sum_i \partial_i p v_i \\
=&\textstyle\int_\Omega \sum_i \sum_j (\partial_i u_j + \partial_j u_i)\partial_j v_i - \int_{\partial\Omega} \sum_i \sum_j (\partial_i u_j + \partial_j u_i) n_j v_i \\
&-\textstyle\int_\Omega \sum_i p \partial_i v_i + \int_{\partial\Omega} \sum_i p\, n_i v_i
\end{aligned}$$

変形速度テンソルが対称テンソルである $[D(u)]_{i\,j} = (\partial_i u_j + \partial_j u_i)/2$ ことから

$$\textstyle\sum_{i,j}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)\partial_j v_i = \sum_{i,j}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)\partial_i v_j = 2\sum_{i,j}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)/2(\partial_i v_j + \partial_i v_j)/2$$

弱形式は次のようになる

$$\int_\Omega 2D(u) : D(v) - \int_\Omega p \nabla \cdot v = \int_\Omega f \cdot v + \int_{\Gamma_N} (2D(u)n - np) \cdot v$$

Stokes 方程式の境界条件

滑り境界条件

n : 境界での単位外向き法線
t_1, t_2 境界での単位接線 $t_1 \times t_2 = n$

$$\begin{cases} u \cdot n &= 0 \\ \sigma(u,p)n \times n &= 0 \end{cases}$$

境界でテスト関数 v は外向き法線成分が 0 とする $u \cdot n = 0$

$$\begin{aligned} v &= (v \cdot n)n + (v \cdot t_1)t_1 + (v \cdot t_2)t_2 = v_1 t_1 + v_2 t_2 \\ \sigma(u,p)n \cdot v &= \sigma(u,p)n \cdot (v_1 t_1 + v_2 t_2) \\ &= v_1 \sigma(u,p)n \cdot t_1 + v_2 \sigma(u,p)n \cdot t_2 \end{aligned}$$

全周 Dirichlet 境界条件

$\Gamma = \partial\Omega$ 全周で $u = g$ を課すためには $\int_{\partial\Omega} g \cdot n = 0$ が必要. 非圧縮性条件から

$$0 = \int_\Omega \nabla \cdot u = -\int_\Omega u \cdot \nabla 1 + \int_{\partial\Omega} u \cdot n = \int_{\partial\Omega} g \cdot n$$

圧力 p に定数値 p_0 を加えても $\nabla(p + p_0) = \nabla p$ となるため, 圧力は定数分の任意性を持つ. $Q = L^2_0(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega)\,;\, \int_\Omega p = 0\}$ あるいは $Q = L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ を用いる.

Stokes 方程式の双一次形式と可解性

$$a(u,v) = 2\int_\Omega D(u) : D(v), \quad b(u,p) = -\int_\Omega \nabla \cdot u\, p$$
$$F(v) = \int_\Omega f \cdot v + \int_{\Gamma_N} h \cdot v$$

流入, 流出境界条件を課す Stokes 方程式の関数空間は

$$V(g) := \{u \in H^1(\Omega)^3\,;\, u = g \text{ on } \Gamma_D\},\ V = V(0)$$
$$Q := L^2(\Omega)$$

次を満たす $(u,p) \in V(g) \times Q$ を見付けよ

$$a(u,v) + b(v,p) + b(u,q) = F(v) \quad \forall (v,q) \in V \times Q$$

強圧性 $\exists \alpha > 0 \quad a(u,u) \geq \alpha ||u||^2\ \forall u \in V$
連続性 $\exists \gamma > 0 \quad |a(u,v)| \leq \gamma ||u||\, ||v||\ \forall u,v \in V$
inf-sup 条件 $\exists \beta > 0 \quad \sup_{v \in V} \dfrac{b(v,q)}{||v||_1} \geq \beta ||q||_0$
$V \times Q$ での双一次形式を $A(u,p\,;\,v,q) = a(u,v) + b(v,p) + b(u,q)$ とすると,
上記 3 条件より

$$\exists \alpha' > 0 \qquad \sup_{(v,q) \in V \times Q} \frac{A(u,p\,;\,v,q)}{||(v,q)||_{V \times Q}} \geq \alpha' ||(u,p)||_{V \times Q}$$

Stokes 方程式の有限要素近似：1/2

流速に P2 要素, 圧力に P1 要素を用いる

$$V_h(g) = \{u_h|_K \in P_2^3(K)\,;\, u_h = g \text{ on } \Gamma_D\}$$
$$Q_h = \{p_h|_K \in P_1(K)\}$$

要素サイズ h に対し一様な inf-sup 条件が成り立つ

$$\exists\beta > 0 \quad \sup_{v\in V_h} \frac{b(v,q)}{||v||_1} \geq \beta||q||_0 \; \forall q \in Q_h$$

連続版と同様に

$$\exists\alpha' > 0 \quad \sup_{(v,q)\in V_h\times Q_h} \frac{A(u,p\,;\,v,q)}{||(v,q)||_{V_h\times Q_h}} \geq \alpha'||(u,p)||_{V_h\times Q_h}$$

有限要素解の誤差は有限要素空間の関数近似の能力に帰着される

$$||(u-u_h,p-p_h)||_{V\times Q} \leq (1+\frac{\gamma'}{\alpha'})||(u-v_h,p-q_h)||_{V\times Q}$$

Stokes 方程式の有限要素近似：2/2

流速と圧力の双方に P1 要素を用いる

$$V_h(g) = \{u_h|_K \in P_1^3(K)\,;\, u_h = g \text{ on } \Gamma_D\}$$
$$Q_h = \{p_h|_K \in P_1(K)\}$$

$\delta > 0$ を正のパラメータ定数, h_K を要素の直径とする.
安定化項を実現する圧力に関する双一次形式を導入する

$$d(p,q) = \sum_K h_K^2 \int_K \nabla p \cdot \nabla q$$

要素サイズに依存するノルムを $|p|_h^2 = d(p,p)$ とする.
$V \times Q$ での双一次形式として次を用いる

$$A(u,p\,;\,v,q) = a(u,v) + b(v,p) + b(u,q) - \delta d(p,q)$$

inf-sup 条件を緩めた条件が成立する

$$\exists \beta_1, \beta_2 > 0 \quad \sup_{v \in V_h} \frac{b(v,q)}{||v||_1} \geq \beta_1 ||q||_0 - \beta_2 |q|_h \ \forall q \in Q_h$$

Galerkin 直交性は安定化項のため満されないが,

$$A'(u - u_h, p - p_h\,;\, v_h, q_h) = -\delta d(p, q_h)$$

有限要素解の誤差は要素サイズ h の 1 次のオーダーになる

$$||u - u_h||_1 + ||p - p_h||_0 \leq c\,h\{||u||_2 + ||p||_1\}$$

Stokes 方程式の有限要素近似の行列表現：1/2

流速と圧力の有限要素基底を span$\{\varphi_i\} = V_h$, span$\{\psi_i\} = Q_h$ とする. 双一次形式に対する剛性行列を次のように表す.

$$[A]_{i\,j} = a(\varphi_j, \varphi_i),$$

$$[B^T]_{i\,j} = b(\varphi_i, \psi_j), \quad [B]_{i\,j} = b(\varphi_j, \psi_i)$$

P2/P1 要素を用いる有限要素解を求める連立一次方程式は

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$$

双一次形式に対する inf-sup 条件 $\sup_{v \in V_h} \dfrac{b(v,q)}{||v||_1} \geq \beta ||q||_0$ は $||v||_1 = 1$ を満す任意の $v \in V$ に対して, $0 = b(v,p) \geq \beta ||p||$ となる場合には $p = 0$ が従うことになり, $B^T p = 0$ の時は $p = 0$ となる. この場合剛性行列は不定値であるが, 逆を持つことがわかる.

$$\left(\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ -p \end{bmatrix} \right) = 0 \;\Rightarrow (Au, u) + (B^T p, u) + (Bu, -p) = (A\,u, u) \geq \alpha ||u||^2$$

$$\Rightarrow u = 0$$

$$\Rightarrow B^T p = -A\,u = 0$$

$$\Rightarrow p = 0$$

Stokes 方程式の有限要素近似の行列表現：2/2

流速と圧力の有限要素基底を span$\{\varphi_i\} = V_h$, span$\{\psi_i\} = Q_h$ とする. 双一次形式に対する剛性行列を次のように表す.

$$[A]_{i\,j} = a(\varphi_j, \varphi_i), \quad [D]_{i\,j} = d(\psi_j, \psi_i)$$
$$[B^T]_{i\,j} = b(\varphi_i, \psi_j), \quad [B]_{i\,j} = b(\varphi_j, \psi_i)$$

P1/P1 要素を用いる有限要素解を求める連立一次方程式は

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & -\delta D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$$

第 2 式の符号を替えると

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ -B & \delta D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\left(\begin{bmatrix} A & B^T \\ -B & \delta D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} \right) &= (A\,u, u) + (B^T p, u) + (-B\,u, p) + \delta(D\,p, p) \\ &= (A\,u, u) + \delta(D\,p, p) > 0\end{aligned}$$

剛性行列は非対称になるが, 強圧性が成り立つ.

非圧縮性流体：2/2

定常 Navier-Stokes 方程式
領域を Ω, 境界を $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, n を境界での外向き単位法線とする.
Re を Reynolds 数とする.
流速 u と圧力 p に対する非圧縮性条件を課す次の方程式系を考える.

$$\begin{aligned} (u \cdot \nabla u)u - \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla \cdot D(u) + \nabla p &= f \text{ in } \Omega \\ \nabla \cdot u &= 0 \text{ in } \Omega \\ u &= g \text{ on } \Gamma_D \\ \sigma(u,p)n &= h \text{ on } \Gamma_N \end{aligned}$$

Stokes 方程式の拡散項と勾配と発散の項の双一次形式と外力の線形形式

$a(u,v\,;\mathrm{Re}) = \dfrac{2}{\mathrm{Re}} \displaystyle\int_\Omega D(u) : D(v), \quad b(u,p) = -\int_\Omega \nabla \cdot u\, p$

$F(v) = \displaystyle\int_\Omega f \cdot v + \int_{\Gamma_N} h \cdot v$

に非線形項を追加する

$a_N(w,u,v) = \displaystyle\int_\Omega (w \cdot \nabla)u \cdot v$

非線形の弱形式は 次を満たす $(u,p) \in V(g) \times Q$ を見付けよ, となる

$$a_N(u,u,v) + a(u,v\,;\mathrm{Re}) + b(v,p) - b(u,q) + \delta d(p,q) = F(v) \quad \forall (v,q) \in V \times Q$$

非線形問題の解法：1/2

定常 Navier-Stokes 方程式の非線形弱形式

$$\mathcal{F}(u,p\,;\,v,q) := a_N(u,u,v) + a_N(u,v\,;\mathrm{Re}) + b(v,p) - b(u,q) + \delta d(p,q) - F(v)$$

により, 非線形問題は

$$\mathcal{F}(u,p\,;v,q) = 0 \quad \forall (v,q) \in V \times Q$$

を満す $(u,p) \in V(g) \times Q$ を求めよとなる.
Newton 法を適用するために, $\mathcal{F}(u,p\,;v,q)$ の Fréchet 微分を考える. 非線形項は流速の弱形式 $a_N(u,u,v)$ のみであるので, $\mathcal{F}_N(u,v) = a_N(u,u,v)$ の $u \in V(g)$ に対する, $\delta u \in V(0)$ の変分を計算する. δu の 2 次の項を無視すると

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_N(u+\delta u,v) - \mathcal{F}_N(u,v) &= a_N(u+\delta u, u+\delta u, v) - a_N(u,u,v)\\ &\simeq a_N(\delta u, u, v) + a_N(u,\delta u, v)\end{aligned}$$

n-ステップの解 (u^n,p^n) から (u^{n+1},p^{n+1}) を更新する Newton 法の反復は, 次を満す $(\delta u, \delta p) \in V(0) \times Q$ を見付け

$$\begin{aligned}&a_N(\delta u, u^n, v) + a_N(u^n, \delta u, v) + a(\delta u, v\,;\mathrm{Re}) + b(v,\delta p) - b(\delta u, q) + \delta d(\delta p, q)\\ =&a_N(u^n,u^n,v) + a(u^n, v\,;\mathrm{Re}) + b(v,p^n) - b(u^n,q) + \delta d(p^n,q) - F(v) \quad \forall (v,q) \in V\end{aligned}$$

$u^{n+1} = u^n - \delta u,\ p^{n+1} = p^n - \delta p$ とする.
増分 $(\delta u, \delta p)$ を求める際の流速の境界条件は $\delta u \in V \times Q$ より斉次 Dirichlet 条件を課すことに注意する.

非線形問題の解法：2/2

Navier-Stokes 方程式の非線形項の u^n ステップの線形化による係数行列を次のように表す.

$$[A_1(u^n)]_{i\,j} = a_N(\varphi_j, u^n, \varphi_i), \qquad [A_2(u^n)]_{i\,j} = a_N(u^n, \varphi_j, \varphi_i)$$

流速と圧力に関する線形化された方程式の行列表現は

$$\begin{bmatrix} A_1(u^n) + A_2(u^n) + A(\mathrm{Re}) & B^T \\ -B & \delta D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u \\ f_p \end{bmatrix}$$

ここで右辺は n-ステップでの残差 $\mathcal{F}(u^n, p^n\,;\,\varphi_{i_V}, \psi_{i_P})$ を表わす.
Reynolds 数が大きくなると, 定常解は存在しないが, その場合は Newton 法の Jacobi 行列の可解性が失なわれている.

Newton 法の収束のためには適切な初期値を選ぶ必要がある.

- 初期データ (u^0, p^0) は Stokes 方程式の解を利用する.
- 高い Reynolds 数の定常解は低い Reynolds 数の定常解を初期データに利用する.