

有限要素法入門

鈴木 厚¹

¹ 理研計算科学研究センター 大規模並列数値計算技術研究チーム
atsushi.suzuki.aj@a.riken.jp

混合境界条件の Poisson 方程式と弱形式 : 1/2

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2, \partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$$

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega, \\ u &= g \text{ on } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= h \text{ on } \Gamma_N. \end{aligned}$$

弱形式

V : 関数空間, $V(g) = \{u \in V; u = g \text{ on } \Gamma_D\}$. $V = C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$?

Find $u \in V(g)$ s.t.

$$\int_{\Omega} -\Delta u v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in V(0)$$

部分積分に関する Gauss-Green の公式より

$u, v \in V, n = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$: 境界 $\partial\Omega$ に対する外向き法線ベクトル

$$\int_{\Omega} (\partial_i u) v dx = - \int_{\Omega} u \partial_i v dx + \int_{\partial\Omega} u n_i v ds.$$

混合境界条件の Poisson 方程式と弱形式 : 2/2

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (-\partial_1^2 - \partial_2^2)u v dx &= \int_{\Omega} (\partial_1 u \partial_1 v + \partial_2 u \partial_2 v) dx - \int_{\partial\Omega} (\partial_1 u n_1 + \partial_2 u n_2) v ds \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Gamma_D \cup \Gamma_N} \nabla u \cdot n v ds \\ v = 0 \text{ on } \Gamma_D \Rightarrow &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Gamma_N} h v ds\end{aligned}$$

次を満たす $u \in V(g)$ を見付けよ

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_N} h v ds \quad \forall v \in V(0)$$

- ▶ $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$: 双一次形式
- ▶ $F(\cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$: 汎関数

次を満たす $u \in V(g)$ を見付けよ

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V(0)$$

離散化と行列表現: 1/2

有限要素基底 $\text{span}[\varphi_1, \dots, \varphi_N] = V_h \subset V$

$$u_h \in V_h \Rightarrow u_h = \sum_{1 \leq i \leq N} u_i \varphi_i$$

有限要素節点 $\{P_j\}_{j=1}^N$, $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$ Lagrange 要素

$\Lambda_D \subset \Lambda = \{1, \dots, N\}$: Dirichlet 境界にある節点の添字集合

Dirichlet データ: $u(P_k) = g(P_k) \quad P_k \in \Gamma_D$

$$V_h(g) = \{u_h \in V_h; u_h = \sum u_i \varphi_i, u_k = g_k (k \in \Lambda_D)\}$$

次を満たす $u_h \in V_h(g)$ を見付けよ

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h(0).$$

次を満たす $\{u_j\}, u_k = g_k (k \in \Lambda_D)$ を見付けよ

$$a\left(\sum_j u_j \varphi_j, \sum_i v_i \varphi_i\right) = F\left(\sum_i v_i \varphi_i\right) \quad \forall \{v_i\}, v_k = 0 (k \in \Lambda_D)$$

次を満たす $\{u_j\}_{j \in \Lambda}$ を見付けよ

$$\begin{aligned} \sum_j a(\varphi_j, \varphi_i) u_j &= F(\varphi_i) & \forall i \in \Lambda \setminus \Lambda_D \\ u_k &= g_k & \forall k \in \Lambda_D \end{aligned}$$

離散化と行列表現: 2/2

次を満たす $\{u_j\}_{j \in \Lambda \setminus \Lambda_D}$ を見付けよ

$$\sum_{j \in \Lambda \setminus \Lambda_D} a(\varphi_j, \varphi_i) u_j = F(\varphi_i) - \sum_{k \in \Lambda_D} a(\varphi_k, \varphi_i) g_k \quad \forall i \in \Lambda \setminus \Lambda_D$$

$A = \{a(\varphi_j, \varphi_i)\}_{i, j \in \Lambda \setminus \Lambda_D}$: 対称

$A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $f \in \mathbb{R}^N$, $N = \#(\Lambda \setminus \Lambda_D)$

係数行列の正定値性は双一次形式の強圧性より得られる

A : (対称) 正定値, 即ち, $(A\vec{u}, \vec{u}) > 0 \quad \forall \vec{u} \neq 0$

証明

$$\begin{aligned} (A\vec{u}, \vec{u}) &= \sum_i \left(\sum_j a(\varphi_j, \varphi_i) u_j \right) u_i \\ &= a\left(\sum_j \varphi_j u_j, \sum_i \varphi_i u_i\right) = a(u, u) \geq \alpha \|u\|_1^2 \end{aligned}$$

双一次形式の強圧性は Poincaré's の不等式 $\|u\|_1^2 \geq c \|u\|_0^2$ より得られる

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u = \|\nabla u\|_0^2 = \|u\|_1^2$$

$$\|u\|_1^2 = ((1 - \beta) + \beta) \|u\|_1^2 \geq c\beta \|u\|_0^2 + (1 - \beta) \|u\|_1^2 = \frac{c}{1 + c} \|u\|_1^2 \quad (\beta = \frac{1}{1 + c} \text{ ととる})$$

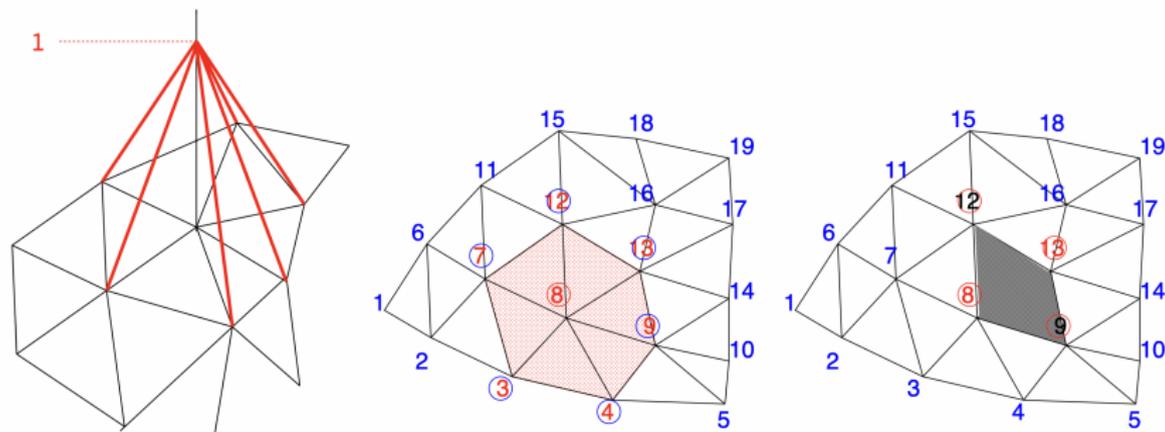
P1 有限要素と疎行列

\mathcal{T}_h : 領域 Ω の三角形要素 $K \in \mathcal{T}_h$ による要素分割

区分的一次要素 : $\varphi_i|_K(x_1, x_2) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$

$\varphi_i|_K(P_j) = \delta_{ij}$

$$[A]_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx.$$



A : 疎行列, CRS (Compressed Row Storage) 形式によって格納する

非斉次 Dirichlet 条件の問題を解くためのペナルティー法

行列 A の対角成分のうち添字集合 $k \in \Lambda_D$ の添字で示される要素を修正
ペナルティーパラメータ $\tau = 1/\varepsilon$; τg_k

$$[A]_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$$
$$\begin{matrix} u_k \\ u_i \end{matrix} = \begin{matrix} \tau g_k, k \in \Lambda_D \\ f_i \end{matrix}$$

$$\tau u_k + \sum_{j \neq k} a_{kj} u_j = \tau g_k \Leftrightarrow u_k - g_k = \varepsilon \left(- \sum_{j \neq k} a_{kj} u_j \right),$$
$$\sum_j a_{ij} u_j = f_i \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \setminus \Lambda_D.$$

この手法は行列の添字の順番付けを変更せず行列の対称性を保つことができる

抽象的弱形式

V : 内積 (\cdot, \cdot) を持ち, ノルムを $\|\cdot\|$ と表わす Hilbert 空間

双一次形式 $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

▶ 強圧性 : $\exists \alpha > 0 \quad a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in V.$

▶ 連続性 : $\exists \gamma > 0 \quad |a(u, v)| \leq \gamma \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V.$

汎関数 $F(\cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}.$

次を満たす $u \in V$ を見付けよ $a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$

は Lax-Milgram の定理により一意的な解を持つ

双一次形式 $a(\cdot, \cdot)$ に対するより一般的な条件

▶ inf-sup 条件

▶ $\exists \alpha_1 > 0 \quad \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{a(u, v)}{\|v\|} \geq \alpha_1 \|u\| \quad \forall u \in V.$

▶ $\exists \alpha_2 > 0 \quad \sup_{u \in V, u \neq 0} \frac{a(u, v)}{\|u\|} \geq \alpha_2 \|v\| \quad \forall v \in V.$

次を満たす $u \in V$ を見付けよ $a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$ の問題は一意的な解を持つ.

誤差評価理論 : 1 / 2

V : Hilbert 空間, $V_h \subset V$: 有限要素空間

$$\blacktriangleright u \in V, a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V.$$

$$\blacktriangleright u_h \in V_h, a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \subset V.$$

$$a(u, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \subset V \text{ より}$$

$$\text{Galerkin 直交性} \quad a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

が得られる

双一次形式 $a(\cdot, \cdot)$ の強圧性と連続性を仮定する.

$$\text{Céa の補題} \quad \|u - u_h\| \leq \frac{\gamma}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|.$$

$$\text{証明: } \|u - u_h\| \leq \|u - v_h\| + \|v_h - u_h\|$$

$$\begin{aligned} \alpha \|u_h - v_h\|^2 &\leq a(u_h - v_h, u_h - v_h) \\ &= a(u_h, u_h - v_h) - a(v_h, u_h - v_h) \\ &= a(u, u_h - v_h) - a(v_h, u_h - v_h) \\ &= a(u - v_h, u_h - v_h) \leq \gamma \|u - v_h\| \|u_h - v_h\|. \end{aligned}$$

誤差評価理論 : 2 / 2

$\Pi_h : C(\bar{\Omega}) \rightarrow V_h, \quad \Pi_h u = \sum_{1 \leq i \leq N} u(P_i) \phi_i,$

$\text{span}[\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq N}] = S_h$, 有限要素基底 ϕ_i による線形包

多項式による補間誤差 $K \in \mathcal{T}_h, P_k(K) \subset H^l(K), v \in H^{k+1}(\Omega)$

\Rightarrow

$\exists c > 0 \quad |v - \Pi_h v|_{s,K} \leq c h_K^{k+1-s} |v|_{k+1,K} \quad (0 \leq s \leq \min\{k+1, l\}).$

厳密解 $u \in H^{k+1}$ に対する P_k 要素による有限要素解 u_h の誤差

\Rightarrow

$\exists c > 0 \quad \|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq c h^k |u|_{k+1,\Omega}$

証明:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{1,\Omega} &\leq c \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega} \\ &\leq c \|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega} \\ &\leq c \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (h_K^k + h_K^{(k+1)}) |u|_{k+1,K} \\ &\leq c h^k |u|_{k+1,\Omega} \end{aligned}$$

Sobolev 空間

P1 有限要素空間は要素間の辺で微分値が連続とならないため $C^1(\Omega)$ に属さない

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \|u\|_1^2 = (u, u) < +\infty\}$$

$$(u, v) = \int_{\Omega} u v + \nabla u \cdot \nabla v,$$

$$\|u\|_0^2 = \int_{\Omega} u u, \quad |u|_1^2 = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u$$

$$H_0^1 = \{u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ on } \partial\Omega\}.$$

Poincaré の不等式 $\exists C(\Omega) u \in H_0^1 \Rightarrow \|u\|_0 \leq C(\Omega)|u|_1$.

証明 (正方形領域 $\Omega = (0, s) \times (0, s)$ に対して)

$v \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$v(x_1, x_2) = v(0, x_2) + \int_0^{x_1} \partial_1 v(t, x_2) dt$$

$$|v(x_1, x_2)|^2 \leq \int_0^{x_1} 1^2 dt \int_0^{x_1} |\partial_1 v(t, x_2)|^2 dt \leq s \int_0^s |\partial_1 v(t, x_2)|^2 dt$$

$$\int_0^s |v(x_1, x_2)|^2 dx_1 \leq s^2 \int_0^s |\partial_1 v(x)|^2 dx_1 \quad \int_{\Omega} |v|^2 dx_1 dx_2 \leq s^2 \int_{\Omega} |\partial_1 v|^2 dx_1 dx_2$$

数値積分

数値積分公式:

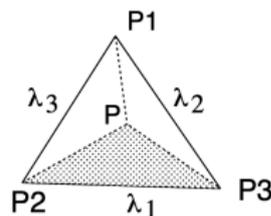
三角形要素 K での積分点 $\{P_i\}_{i \leq i \leq m}$ と重み $\{\omega_i\}_{i \leq i \leq m}$

$$|u - u_h|_{0,\Omega}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K |u - u_h|^2 dx \sim \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^m |(u - u_h)(P_i)|^2 \omega_i$$

公式: 5-次, 7-点,

P.C. Hammer, O.J. Marlowe, A.H. Stroud [1956]

面積座標 $\{\lambda_i\}_{i=1}^3$	重み	
$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$\frac{9}{40} K $	$\times 1$
$(\frac{6-\sqrt{15}}{21}, \frac{6-\sqrt{15}}{21}, \frac{9+2\sqrt{15}}{21})$	$\frac{155-\sqrt{15}}{1200} K $	$\times 3$
$(\frac{6+\sqrt{15}}{21}, \frac{6+\sqrt{15}}{21}, \frac{9-2\sqrt{15}}{21})$	$\frac{155+\sqrt{15}}{1200} K $	$\times 3$



注意

有限要素法の誤差評価を実行する際に厳密解 u を有限要素空間に補間して計算する $|\Pi_h u - u_h|_{1,\Omega}$ と誤差の値は改善されてしまっていることが多い (超収束と呼ばれる). 極端な例では双一次形式の解は補間と同じになり誤差は生じない).

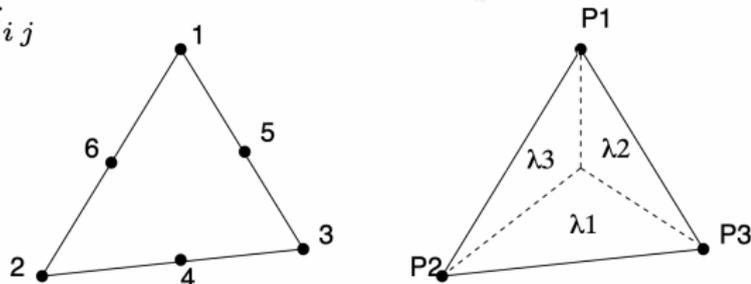
P2 有限要素

\mathcal{T}_h : 領域 Ω の三角形要素 $K \in \mathcal{T}_h$ による要素分割

区分的二次要素: 三角形要素 K あたり 6 自由度

$$\varphi_i|_K(x_1, x_2) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2$$

$$\varphi_i|_K(P_j) = \delta_{ij}$$

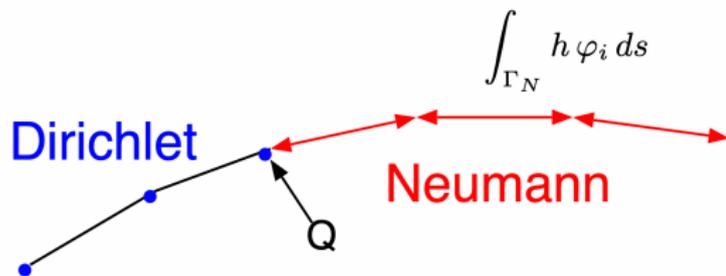


基底関数は面積座標を $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ 用いると次のように表現される

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 4 & \\ & & & & & 4 \\ & & & & & & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 \\ \lambda_2^2 \\ \lambda_3^2 \\ \lambda_2\lambda_3 \\ \lambda_3\lambda_1 \\ \lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(2\lambda_1 - 1) \\ \lambda_2(2\lambda_2 - 1) \\ \lambda_3(2\lambda_3 - 1) \\ 4\lambda_2\lambda_3 \\ 4\lambda_3\lambda_1 \\ 4\lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix}$$

混合境界付近での Neumann データの扱い

Neumann データは有限要素基底 φ_i との積の線積分で計算される



与えられた Neumann データ h が有限要素基底で補間されている場合 $h = \sum_j h_j \varphi_j|_{\Gamma_N}$ は次のように計算される

$$\sum_j h_j \int_{\Gamma_N} \varphi_j \varphi_i ds.$$

節点 $Q \in \bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_N$ では Dirichlet データと Neumann データの両方が必要.

有限要素定式化の利点

- ▶ 境界条件は部分積分の公式により導出される弱形式に自然な形で記述される
- ▶ Dirichlet 境界条件は関数空間に埋め込まれ本質的境界条件と呼ばれる
- ▶ Neumann 境界条件は Gauss-Green の公式により表面/線積分として扱われ自然境界条件と呼ばれる
- ▶ 線形方程式の可解性は連続問題の弱形式の可解性を引き継ぐ
- ▶ 有限要素解の誤差は有限要素空間の近似能力によって評価される

線形/非線形の弾性体 : 1/2

領域を Ω 境界を $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ とする, 第二 Piola-Kirchhoff 応力テンソル Σ に関する問題

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}((I + \nabla u)\Sigma(u(x))) &= f(x) \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{on } \Gamma_D, \\ (I + \nabla u)\Sigma(u(x))n &= h(x) \quad \text{on } \Gamma_N. \end{aligned}$$

Green-St. Venant テンソル $E(u)$

$$E(u) = \frac{1}{2} \left((\nabla u)^T + \nabla u + (\nabla u)^T (\nabla u) \right) = E_L(u) + E_{NL}(u)$$

Piola-Kirchhoff 応力テンソルは Lamé 定数 λ と μ により次のように定められる

$$\Sigma(u) = \check{\Sigma}(E(u)) = \lambda (\operatorname{tr}(E(u))) I + 2\mu E(u)$$

テスト関数 v , $v = 0$ on Γ_D に対する弱形式は

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(I + \nabla u) \check{\Sigma}(E(u)) \cdot v &= \int_{\Omega} f \cdot v \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega} (I + \nabla u) \check{\Sigma}(E(u)) : \nabla v &= \int_{\Omega} f \cdot v + \int_{\Gamma_N \cup \Gamma_D} (I + \nabla u) \check{\Sigma}(E(u))n \cdot v \\ &= \int_{\Omega} f \cdot v + \int_{\Gamma_N} h \cdot v \end{aligned}$$

Dirichlet 条件 g は関数空間に埋め込み本質的境界条件として扱う.

線形/非線形の弾性体 : 2/2

弱形式は次の様に書き直すことができる

$$\int_{\Omega} \check{\Sigma}(E(u)) : dE(u)[v] = \int_{\Omega} f \cdot v + \int_{\Gamma_N} h \cdot v.$$

テンソルの積和に関する公式 $A, B, C \Rightarrow AB : C = B : A^T C$

$$\sum_{ij} \left(\sum_k [A]_{ik} [B]_{kj} \right) [C]_{ij} = \sum_{kj} [B]_{kj} \left(\sum_i [A^T]_{ki} [C]_{ij} \right)$$

と $\check{\Sigma}(E)$ が対称テンソルであることを利用して

$$\begin{aligned} (I + \nabla u) \check{\Sigma}(E(u)) : \nabla v &= \check{\Sigma}(E(u)) : (I + \nabla u)^T \nabla v \\ &= \frac{1}{2} \check{\Sigma}(E(u)) : \left((I + \nabla u)^T \nabla v + \nabla v^T (I + \nabla u) \right) \\ &= \frac{1}{2} \check{\Sigma}(E(u)) : \left(\nabla v + (\nabla u)^T \nabla v + \nabla v^T + \nabla v^T \nabla u \right) \\ &= \check{\Sigma}(E(u)) : dE(u)[v] \end{aligned}$$

- ▶ Green-St. Venant テンソル $E(u)$ を線形化して $E_L(u)$ を得ることで線形弾性体問題を得る
- ▶ 非線形問題を Newton 法によって解く (Jacobian を計算することで係数行列を得る)

線形弾性体

Lamé 定数 λ と μ による Piola-Kirchhoff 応力テンソル

$$\Sigma(u) = \check{\Sigma}(E(u)) = \lambda (\operatorname{tr}(E(u))) I + 2\mu E(u)$$

Green-St. Venant テンソル $E(u)$ の線形化

$$E(u) = \frac{1}{2} \left((\nabla u)^T + \nabla u + (\nabla u)^T (\nabla u) \right) \simeq \frac{1}{2} \left((\nabla u)^T + \nabla u \right) = E_L(u) = e(u)$$

$$\begin{aligned} E_L(u+v) - E_L(u) &= \frac{1}{2} \left((\nabla(u+v))^T + \nabla(u+v) \right) - \frac{1}{2} \left((\nabla u)^T + \nabla u \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((\nabla v)^T + \nabla v \right) = dE_L(u)[v] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \check{\Sigma}(E(u)) : dE_L(u)[v] &= \lambda (\operatorname{tr}(E(u))) I : E_L(v) + 2\mu E_L(u) : dE_L(v) \\ &= \lambda \nabla \cdot u \nabla \cdot v + 2\mu E_L(u) : E_L(v) \end{aligned}$$

テスト関数 v , $v = 0$ on Γ_D に対する線形弾性体問題の弱形式は

$$\int_{\Omega} 2\mu e(u) : e(v) + \lambda \nabla \cdot u \nabla \cdot v = \int_{\Omega} f \cdot v + \int_{\Gamma_N} h \cdot v$$

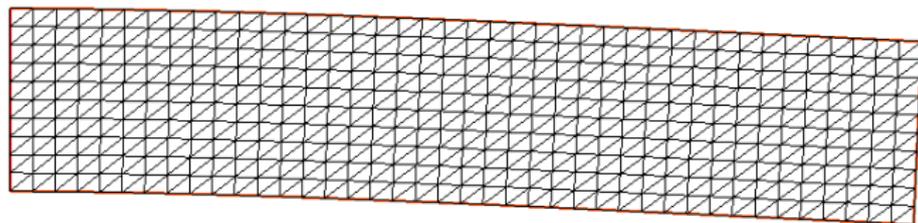
Korn の不等式 $u \in H_1^1(\Omega)^3$ より強圧性が分かる

$$\Rightarrow \exists \alpha(\Omega) \int_{\Omega} e(u) : e(u) \geq \alpha(\Omega) \int_{\Omega} u \cdot u + \nabla u : \nabla u$$

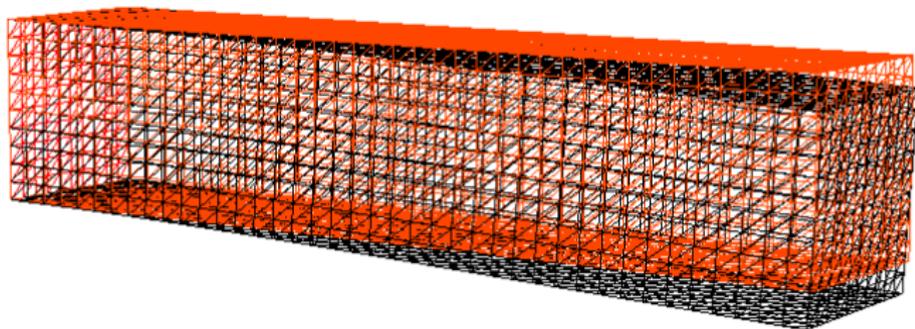
A : テンソル $\Rightarrow I : A = \operatorname{tr}(A)$, また $\operatorname{tr}(e(u)) = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3 = \nabla \cdot u$

linear elasticity problem in 3D : 4/4

2次元の片持ち梁：左端を固定した場合の二次元の変位場



3次元の片持ち梁：左端を固定した場合の三次元の変位場



非線形弾性体 : 1/3

Green-St. Venant テンソルの変分

▶ 一階の変分 $dE(u)[v]$

$$\begin{aligned}dE(u)[v] &= \frac{1}{2} \left((\nabla v)^T + \nabla v \right) + \frac{1}{2} \left((\nabla u)^T \nabla v + (\nabla v)^T \nabla u \right) \\ &= E_L(v) + dE_{NL}(u)[v]\end{aligned}$$

は次の様に計算される

$$\begin{aligned}E(u+v) - E(u) &= E_L(u+v) + E_{NL}(u+v) - (E_L(u) + E_{NL}(u)) \\ &= E_L(v) + \frac{1}{2} (\nabla(u+v))^T \nabla(u+v) - E_{NL}(u) \\ &= E_L(v) + \frac{1}{2} \left((\nabla u)^T \nabla v + (\nabla v)^T \nabla u + (\nabla v)^T \nabla v \right)\end{aligned}$$

▶ 二階の変分 $d^2 E(u)[v, w]$

$$d^2 E(u)[v, w] = dE_{NL}(w)[v]$$

は次の様に計算される

$$\begin{aligned}dE(u+w)[v] - dE(u)[v] &= E_L(v) + dE_{NL}(u+w)[v] - (E_L(v) + dE_{NL}(u)[v]) \\ &= \frac{1}{2} \left((\nabla(u+w))^T \nabla v + (\nabla v)^T \nabla(u+w) \right) \\ &\quad - (\nabla u)^T \nabla v + (\nabla v)^T \nabla u \\ &= \frac{1}{2} \left((\nabla w)^T \nabla v + (\nabla v)^T \nabla w \right)\end{aligned}$$

非線形弾性体 : 2/3

弱形式

$$\int_{\Omega} \check{\Sigma}(E(u)) : dE(u)[v] = \int_{\Omega} f \cdot v + \int_{\Gamma_N} h \cdot v.$$

u^0 : を初期推定として Newton 法の反復計算は

loop $n = 0, 1, 2, \dots$

w の更新のため線形方程式を解く

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \check{\Sigma}(dE(u^n)[w]) : dE(u^n)[v] + \check{\Sigma}(E(u^n)) : d^2E(u^n)[v, w] \\ & = \int_{\Omega} \check{\Sigma}(E(u^n)) : dE(u^n)[v] - \int_{\Omega} f \cdot v - \int_{\Gamma_N} h \cdot v \quad \forall v \end{aligned}$$

近似解の更新 $u^{n+1} = u^n - w$

非線形変分形式の Jacobian は次のように計算される

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \check{\Sigma}(E(u^n + w)) : dE(u^n + w)[v] - \int_{\Omega} \check{\Sigma}(E(u^n)) : dE(u^n)[v] \\ & \simeq \int_{\Omega} \check{\Sigma}(E(u^n) + dE(u^n)[w]) : (dE(u^n)[v] + d^2E(u^n)[v, w]) \\ & \quad - \int_{\Omega} \check{\Sigma}(E(u^n)) : dE(u^n)[v] \\ & \simeq \int_{\Omega} \check{\Sigma}(dE(u^n)[w]) : dE(u^n)[v] + \check{\Sigma}(E(u^n)) : d^2E(u^n)[v, w] \end{aligned}$$

非線形弾性体 : 3/3

Newton 法のための非線形変分形式の Jacobian

$$\int_{\Omega} \check{\Sigma}(dE(u^n)[w]) : dE(u^n)[v] + \check{\Sigma}(E(u^n)) : d^2 E(u^n)[v, w].$$

は対称である. これは次のことより示される

- ▶ $d^2 E(u^n)[v, w] = dE_{NL}(w)[v] = \frac{1}{2} ((\nabla w)^T \nabla v + (\nabla v)^T \nabla w)$ は対称
- ▶ $I : A = \text{tr}(A)$ と, λ と μ は定数であることとより, 対称なテンソル η と ζ に対して次が成り立つことに注意する

$$\begin{aligned} \check{\Sigma}(\eta) : \zeta &= (\lambda \text{tr}(\eta) I + 2\mu \eta) : \zeta = \lambda \text{tr}(\eta) \text{tr}(\zeta) + 2\mu \eta : \zeta \\ &= \lambda \text{tr}(\zeta) \text{tr}(\eta) + 2\mu \zeta : \eta = \check{\Sigma}(\zeta) : \eta \end{aligned}$$

強圧性は反復の n -ステップで近似解 u^n に依存する

- ▶ 第一項は強圧的 $\int_{\Omega} \check{\Sigma}(dE(u^n)[w]) : dE(u^n)[w] \geq 2 \int_{\Omega} \mu E_L(w) : E_L(w)$
- ▶ 第二項の強圧的は $\check{\Sigma}(E(u^n))$ に依存する

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \check{\Sigma}(E(u^n)) : d^2 E(u^n)[w, w] &= \int_{\Omega} \check{\Sigma}(E(u^n)) : d^2 E_{NL}(u^n)[w, w] \\ &= \int_{\Omega} \check{\Sigma}(E(u^n)) : dE_{NL}(w)[w] = \int_{\Omega} \check{\Sigma}(E(u^n)) : (\nabla w)^T (\nabla w) \\ &= \int_{\Omega} \check{\Sigma}(E(u^n)) (\nabla w)^T : (\nabla w)^T \end{aligned}$$

Newton 法による非線形解法 : 1/2

Newton 反復のために直前の近似解 u^n から Jacobian と右辺ベクトルを計算する

$$(\nabla F(u^n)w, v) = \int_{\Omega} \check{\Sigma}(dE(u^n)[w]) : dE(u^n)[v] + \check{\Sigma}(E(u^n)) : d^2E(u^n)[v, w] \quad \forall v$$

$$(F(u^n), v) = \int_{\Omega} \check{\Sigma}(E(u^n)) : dE(u^n)[v] - \int_{\Omega} f \cdot v - \int_{\Gamma_N} h \cdot v \quad \forall v$$

Newton 法の初期推定は線形弾性体に小さな荷重を非斉次 Dirichlet データを課した微小変形の解を用いる

解空間を $V(g) := \{u \in H^1(\Omega)^3; u = g \text{ on } \Gamma_D\}$ として

線形弾性体問題は次を解く

$$\text{to find } u^0 \in V(g) \quad \int_{\Omega} \check{\Sigma}(e(u^0)) : e(v) = 0 \quad \forall v \in V(0)$$

Newton 反復は
loop $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{find } w \in V(0) \quad (\nabla F(u^n)w, v) = (F(u^n), v) \quad \forall v \in V_0$$

$$u^{n+1} = u^n - w$$

Newton 反復の更新量 w は 斉次 Dirichlet データを与える. すなわち $w \in V(0)$ であることを課す.

Newton 法による非線形解法 : 2/2

逐次的な荷重増加の手法

非斉次 Dirichlet データの列 $\{g^{(m)}\}$ をその大きさが増大していくように準備する

$$\|g^{(0)}\| < \|g^{(1)}\| < \dots < \|g^{(N)}\|, \quad g^{(N)} = g$$

非斉次 Dirichlet データ g に対する問題の解を得るためには Newton 反復を内側に含む入れ子の反復を用いる.

逐次的な荷重増加::

loop $m = 0, 1, 2, \dots, N - 1$

$m = 0$ のときは線形弾性体問題を解く

次を満たす $u^0 \in V(g^0)$ を見付けよ $\int_{\Omega} \check{\Sigma}(e(u^0)) : e(v) = 0 \quad \forall v \in V(0)$

$m > 0$ のときは直前の解 u^{m-1} を初期推定 $u^{m,0} \in V(g^{(m)})$ とする.

Newton 反復を実行する::

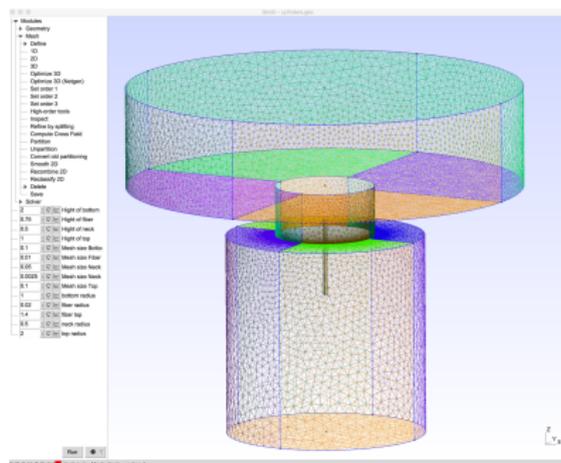
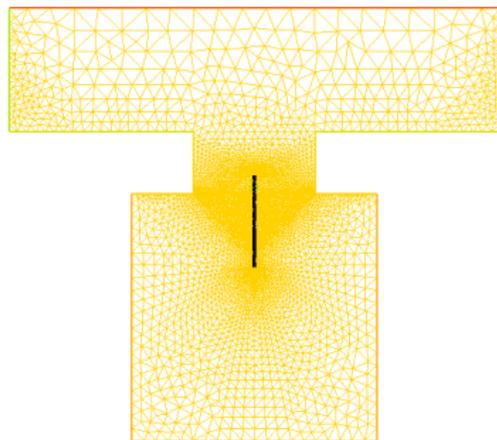
loop $n = 0, 1, 2, \dots$

次を満たす $w \in V(0)$ を見付けよ $(\nabla F(u^{m,n})w, v) = (F(u^{m,n}), v) \quad \forall v \in V_0$

$$u^{m,n+1} = u^{m,n} - w$$

複雑形状の記述

- ▶ 2次元: FreeFEM に内蔵されている bamg によりパラメータ化された曲線群からなる 2次元領域に均等な等方三角形分割を生成する。有限要素解から定義される局所的な距離変換を用いて非等方三角形要素分割を生成することができる。
- ▶ 3次元: Gmsh によりパラメータ化された曲面群からなる 3次元領域, あるいは STEP ファイル形式で記述された CAD データを OepnCASCAD E 幾何エンジンにより解釈し, 均等な等方四面体要素分割を生成する。



FreeFEM にる 2次元形状の記述

```
real rb = 1.0; real lb = 2.0; // ....
border c1(t=0,1){x=-rb + 2*rb*t; y = 0.0; label = 2;};
border c2(t=0,1){x=rb; y = lb * t; label = 3;};
border c3(t=0,1){x=(rb + (r0 - rb) * t); y = lb; label = 4;};
border c4(t=0,1){x=r0; y = lb + l0 * t*t; label = 5;};
border c5(t=0,1){x=r0 + (rc - r0) * t; y = lb+l0; label = 6;};
border c6(t=0,1){x=rc; y = lb + l0 + lc * t; label = 7;};
border c7(t=0,1){x=-rc + 2*rc * t; y = lb+l0+lc; label = 1;};
//
border c8(t=0,1){x=-rb; y = lb * t; label = 3;};
border c9(t=0,1){x=-(rb + (r0 - rb) * t); y = lb; label = 4;};
// ...
// fiber
border d1(t=0,1){x=-rd+2*rd * t + re; y = le; label = 8;};
border d2(t=0,1){x = rd+re; y = le + ld * t; label = 8; };
border d3(t=0,1){x=rd-2*rd * t + re; y = le+ld; label=8;};
border d4(t=0,1){x = -rd+re; y = le+ld * t; label = 8; };

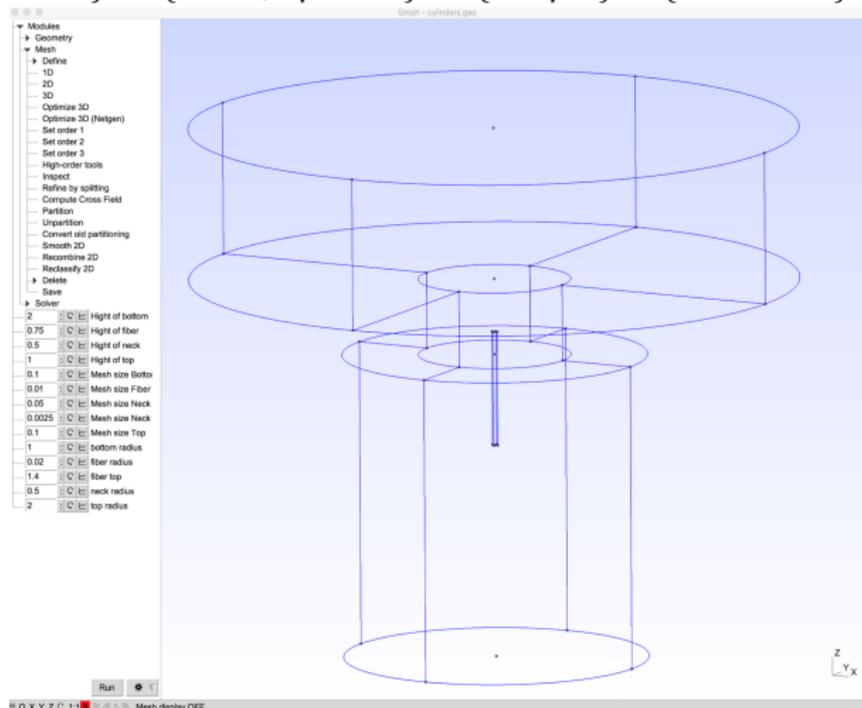
int n = 20; int nn = 20; int nnn = 50;
mesh Th = buildmesh(c1(n) + c2(n) + c3(nn) + c4(nn)
^^I      + c5(n) + c6(nn) + c7(-n)
^^I      + c8(-n) + c9(-nn) + c10(-nnn) + c11(-n) + c12(-nn)
^^I      + d1(nn) + d2(nnn) + d3(nn) +d4(-nnn));
```

Gmsh による 3次元形状の記述: 1/4

```
pext = newp;  
Point(pext+0) = {0, 0, 0, hBottom};  
Point(pext+1) = {RRb, 0, 0, hBottom};  
Point(pext+2) = {0, RRb, 0, hBottom};  
Point(pext+3) = {-RRb, 0, 0, hBottom};  
Point(pext+4) = {0, -RRb, 0, hBottom};  
lext = newl;  
Circle(lext+0) = {pext+1, pext+0, pext+2};  
Circle(lext+4) = {pext+6, pext+5, pext+7};  
Line(lext+8) = {pext+1, pext+6};  
Line(lext+9) = {pext+2, pext+7};  
llex = newll;  
Line Loop(llex+0) = {llex+0, llex+9, -(llex+4), -(llex+8)};  
// ..  
sext = news;  
Ruled Surface(sext+0) = {llex+0}; ^^ISide[0] = sext+0;  
// ..  
Physical Surface(SIDE) = {Side[], Neck[]};  
// ..  
sl = newsl;  
Surface Loop(sl+1) = {Neck[], NeckFine[], Side[], Top[], Bottom[]};  
v = newv;  
Volume(v+0) = {sl+1, sl+2};
```

Gmsh による 3次元形状の記述: 2/4

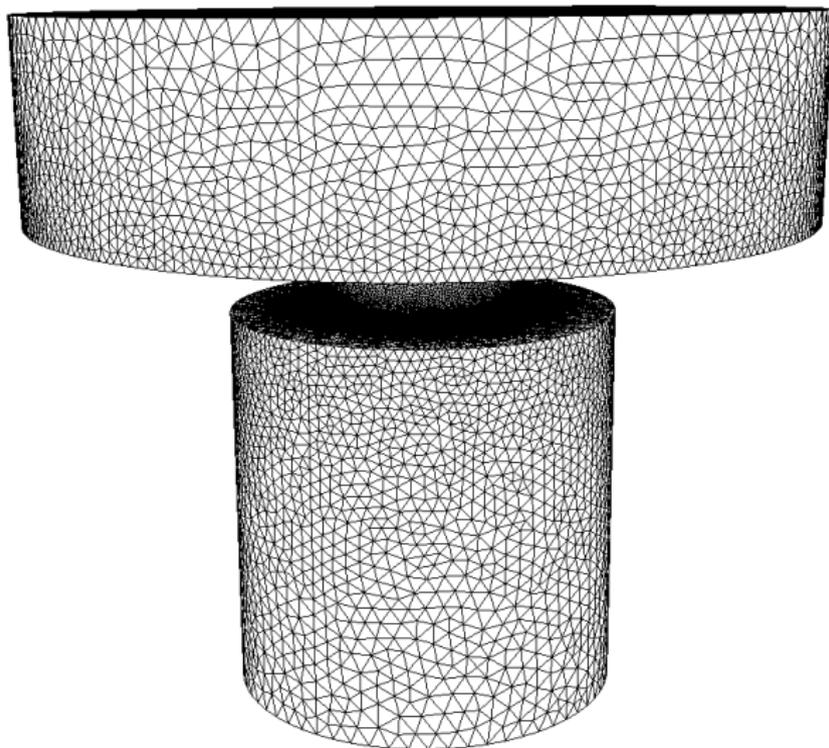
{ points } → { lines, splines } → { loops } ≈ { surfaces } → { volumes }



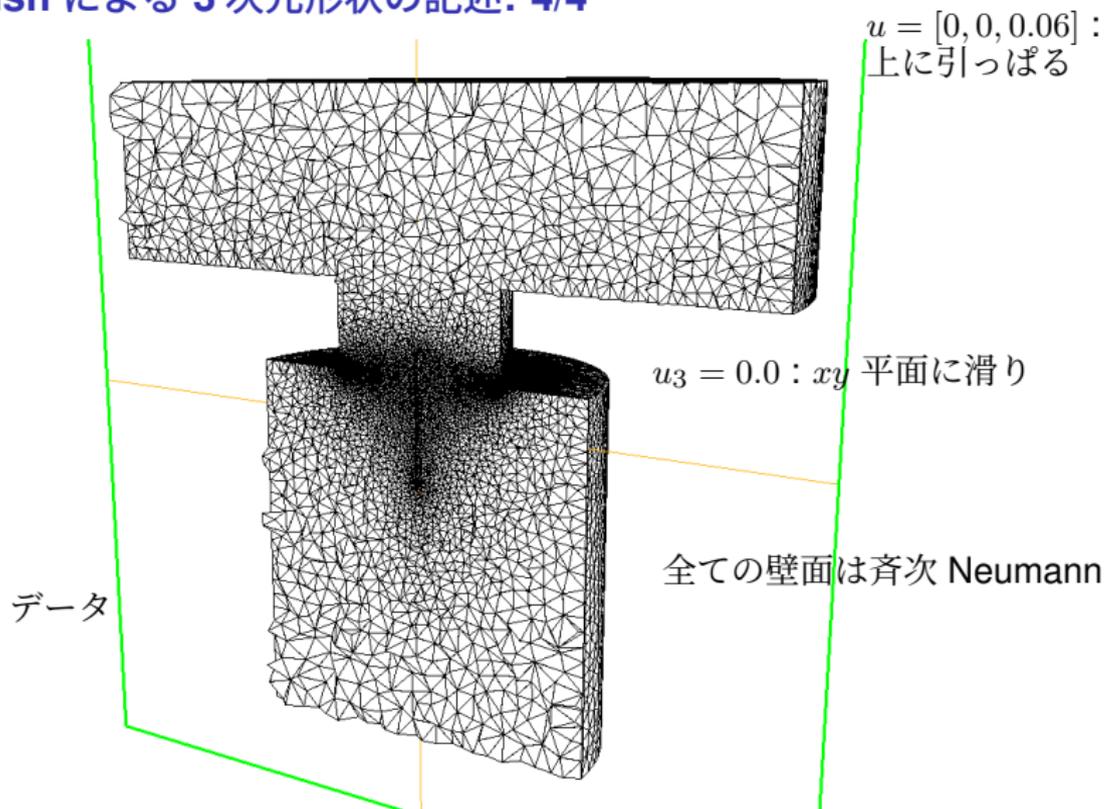
表面構成区分と生成されたメッシュは GUI で確認することができる
FreeFEM で読み込むための出力は次のコマンドライン引数で指定する

```
gmsh -3 -format msh2 -o test.msh test.geo
```

Gmsh による 3次元形状の記述: 3/4

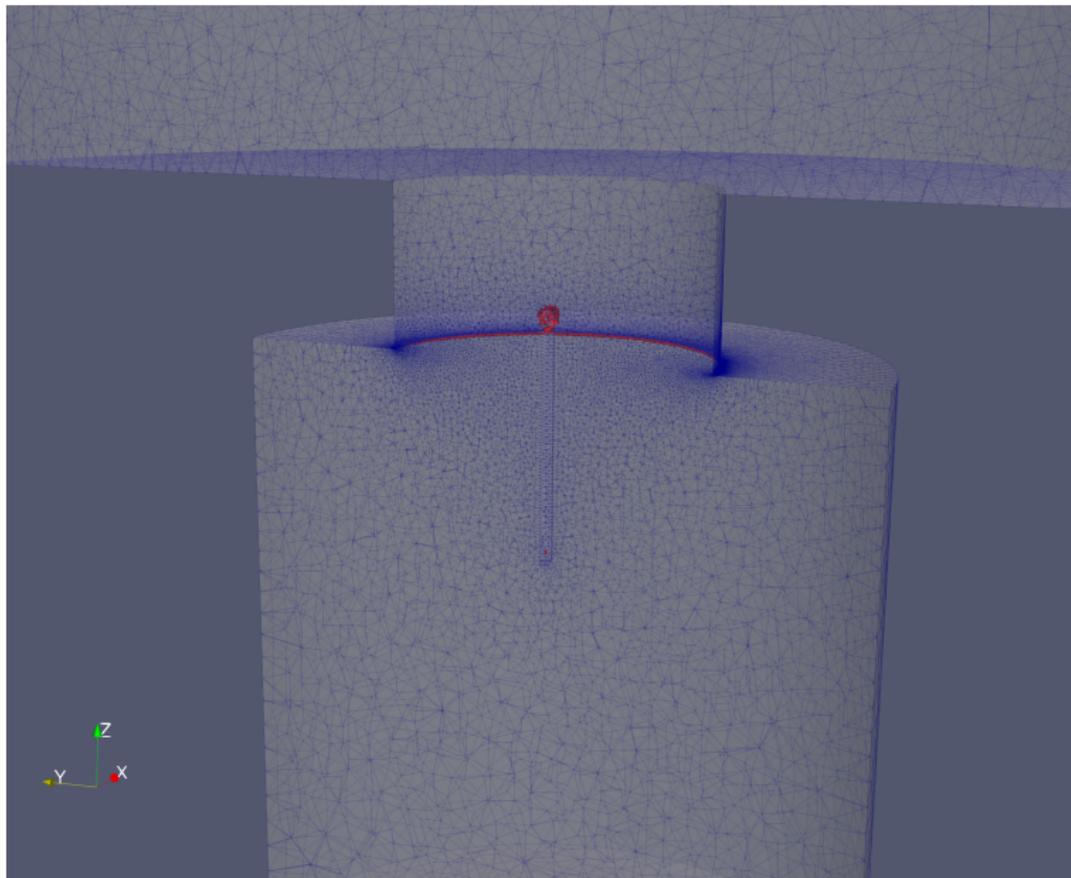


Gmsh による 3次元形状の記述: 4/4



- ▶ $u = 0.0$: 下面は固定
- ▶ 領域の高さは 2.5, 上部の半径は 2, 下部の半径は 1
- ▶ 内部のファイバーは 100 倍の Lamé 定数 μ

数値計算例：応力集中



708,947 有限要素節点, P1 要素による 2,076,809 自由度

参考文献

- ▶ Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Elasticity Theory, 3rd ed. D. Braess Cambridge University Press, 2010
- ▶ Numerical Models for Differential Problems, 2nd ed. A. Quarteroni Springer, 2014 ISBN 978-88-470-5521-6
- ▶ Theory and Practice of Finite Elements A. Ern, J.-L. Guermond Springer, 2004 ISBN 978-1-4419-1918-2
- ▶ The Mathematical Theory of Finite Element Methods, 3rd ed. S. Brenner, R. Scott Springer, 2008 ISBN 978-0-387-75933-3
- ▶ Numerical Approximation of Partial Differential Equations A. Quarteroni, A. Valli Springer, 2008
- ▶ Mathematical Elasticity: Three-Dimensional Elasticity. P. Ciarlet, SIAM Classics in Applied Mathematics, 2021