Spectral sum of current correlators from lattice QCD

石川力（総研大、KEK、R-CCS）

collaborating with 橋本省二

based on arXiv:2103.06539

FTRTインフォーマルセミナー　2021 4/13

Outline

- QCD sum rule の計算に現れていたスペクトル和を格子QCDで計算する手法を提案する
- 格子による手法は摂動QCD・OPEの検証の場を与え、QCDパラメータの決定にも応用できる

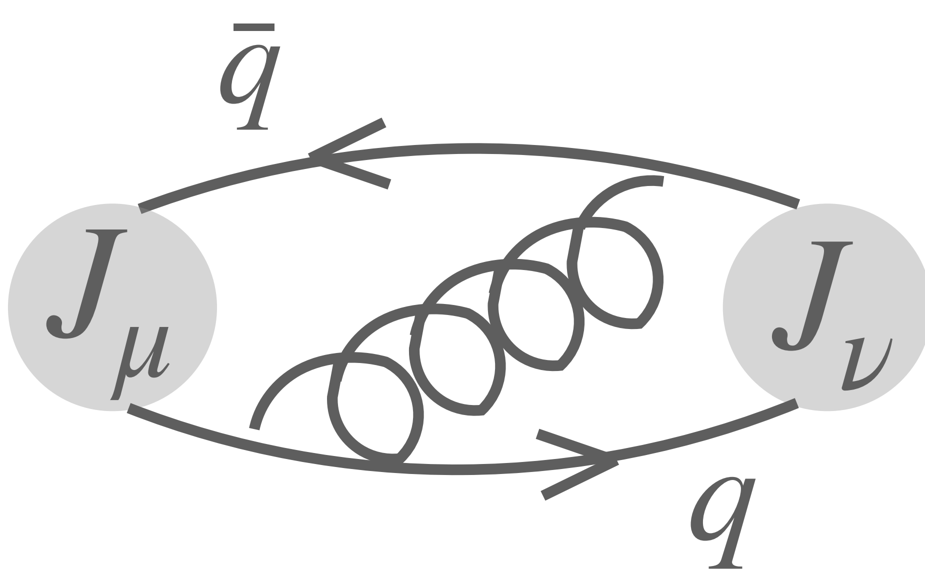
1. 背景と動機
2. スペクトル和の計算手法
3. 結果
4. まとめと展望

背景

QCD sum rule 1

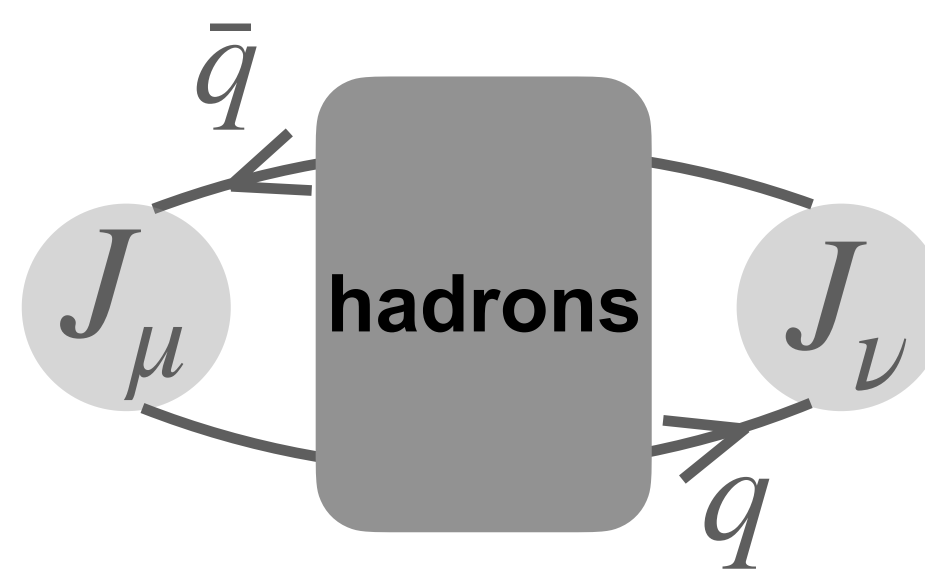
QCDからハドロンの質量などを解析的に予言することは困難

手計算できるもの
（摂動QCD+OPE）



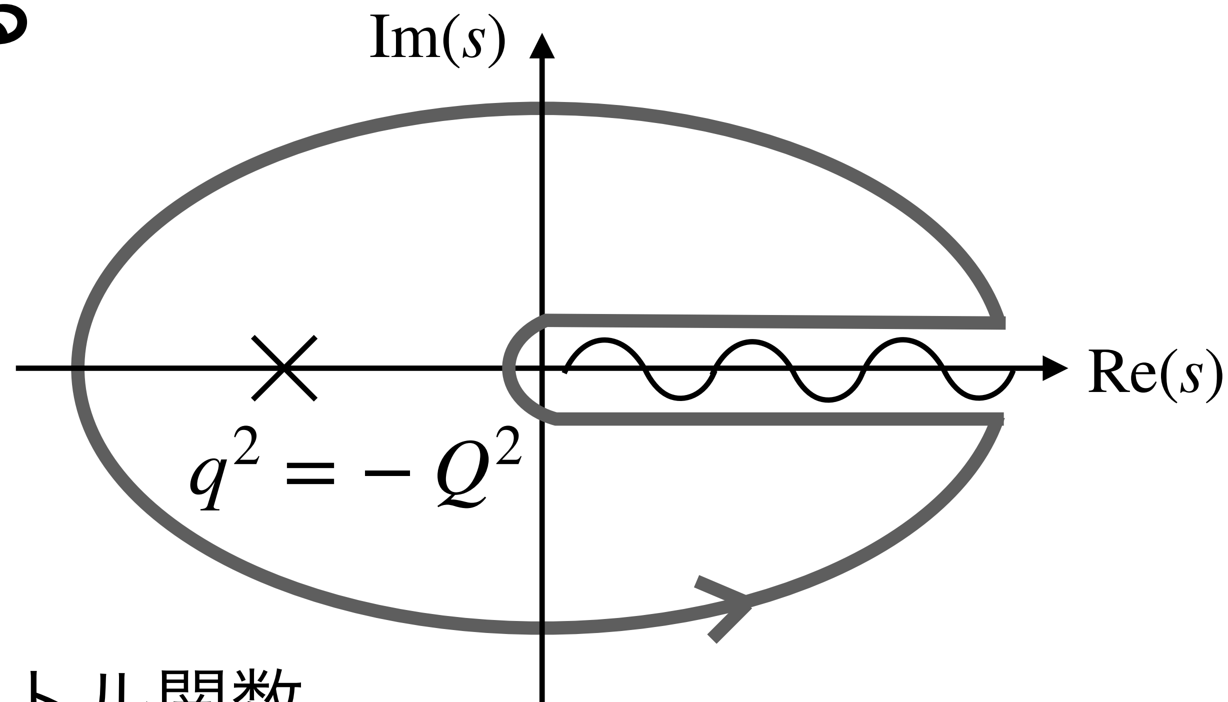
クォークとグルーオン

現実



QCD sum rule 2

◆ **解析的な性質により結びつける**



- 分散関係

$$\Pi(q^2) = \int_0^\infty ds \frac{\rho(s)}{s - q^2}$$

$$\rho(s) = \frac{1}{\pi} \mathrm{Im}\, \Pi(s + i\epsilon)$$: スペクトル関数

- 左辺は $q^2 = -Q^2 \ll 0$ では摂動+OPEで計算できる

- 右辺はハドロン状態の和（積分）

[Shifman, Vainshtein, Zakharov, 79]

QCD sum rule 3

◆ 重み（スメア）関数を導入 ➞ 両辺にBorel 変換

$$\tilde{\Pi}^{\rm OPE}(M^2) = \frac{1}{M^2}\int ds\, e^{-s/M^2}\rho_{\rm ph}(s)$$

- $\mathscr{B}_M\left[\frac{1}{s+Q^2}\right] = \frac{1}{M^2}e^{-s/M^2}$

  → 低エネルギーに感度

- $\mathscr{B}_M\left[\frac{1}{Q^{2n}}\right] = \frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{M^{2n}}$

  → OPEの収束を改善

現象論的なモデル

ハドロンの質量や崩壊定数

Borel変換の定義

$$\mathscr{B}_M := \lim_{\substack{n,\, Q^2\to\infty \\ Q^2/n = M^2}} \frac{Q^{2n}}{(n-1)!}\left(-\frac{\partial}{\partial Q^2}\right)^n$$

◆ **QCDの結合定数やクォーク質量などからハドロンのパラメータを予言**

動機

QCDのパラメータの決定

α_sやm_qなどのQCDのパラメータはOPEとの比較で決定できる

$$\langle O \rangle^{\mathrm{OPE}} = \langle O \rangle^{\mathrm{lat}}$$

ここでの要請は

OPE

- 典型的なエネルギースケールが十分高く摂動論が適用できる。

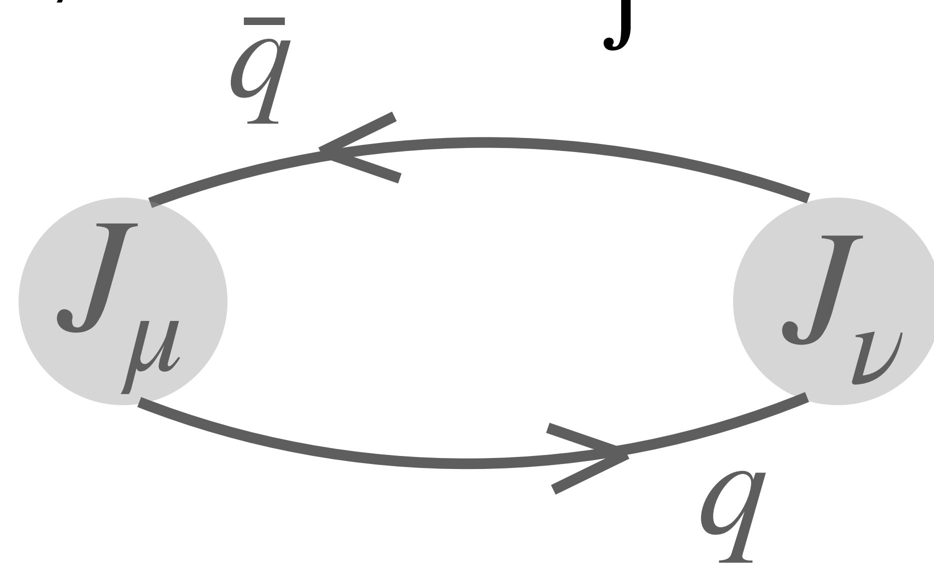
格子QCD

- 離散化誤差が小さく制御しやすい。

カレント-カレント相関関数

ハドロン真空偏極（HVP）

$$(Q_\mu Q_\nu - Q^2 g_{\mu\nu})\Pi(Q^2) := i\int d^4x e^{iQ\cdot x}\langle J_\mu(x) J_\nu(0)\rangle$$



- スケールパラメータ: Q^2
- 摂動 $O(\alpha_s^4)$ ○
- 格子計算 ○
- OPE △

$\Lambda_{\mathrm{QCD}}^2 \ll Q^2 \ll 1/a^2$

OPEの収束には $Q \gtrsim 1.8$ GeV 以上必要

window問題はやや厳しい

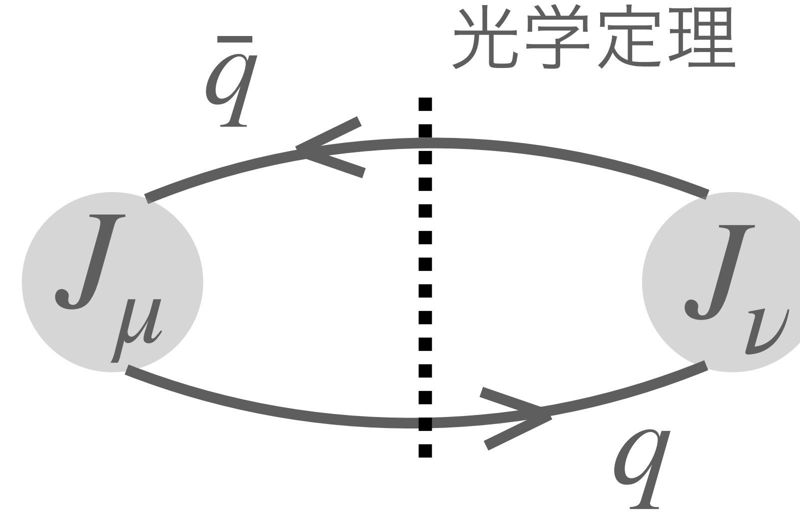
[Hudspith, Lewis, Maltman, Shintani, 18]

[Shifman, Vainshtein, Zakharov, 79]

Borel変換

本研究では

QCD sum rule に現れるBorel変換に着目



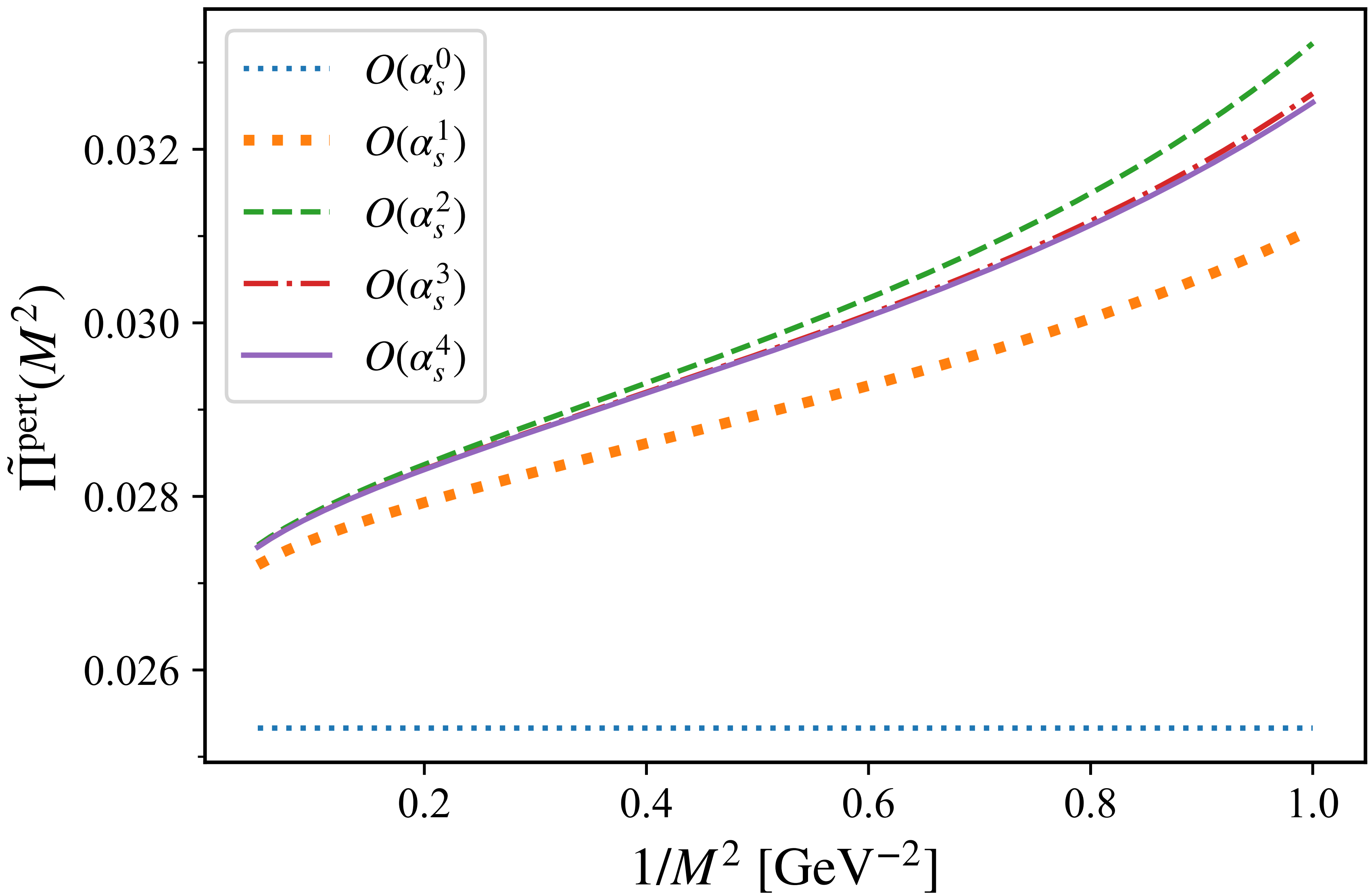
Borel 変換されたHVP

$$\tilde{\Pi}(M^2) := \mathscr{B}_M[\Pi(Q^2)] = \frac{1}{M^2}\int ds\ e^{-s/M^2}\rho(s)$$

$$\rho(s) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\,\Pi(s+i\epsilon) \sim \sum_n |\langle n|J_\mu|0\rangle|^2\delta(s-E_n^2)$$

- スケールパラメータ: M^2
- 摂動 ○ ← $O(\alpha_s^4)$
- OPE ○ ← $\mathscr{B}_M\left[\frac{1}{Q^{2n}}\right] = \frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{M^{2n}}$
- 格子計算 ?

massless 摂動QCD



- $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ まで
- 繰り込みスケール $\mu^2 = M^2 e^{-\gamma_E}$
- 打ち切り誤差は小さい

OPEのBorel変換

$$\Pi^{\mathrm{OPE}}(Q^2) = \frac{1}{4\pi^2}\left(1+\frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi}\right)\log\left(\frac{\mu^2}{Q^2}\right) - \frac{3}{2\pi^2}\frac{m^2}{Q^2}$$

$$+\frac{1}{12}\frac{\langle 0|\frac{\alpha_s}{\pi}G^2|0\rangle}{Q^4} + \frac{2m\langle 0|\bar{q}q|0\rangle}{Q^4} - \frac{224\pi\alpha_s(\mu^2)}{81}\frac{\langle 0|\bar{q}q|0\rangle^2}{Q^6}$$

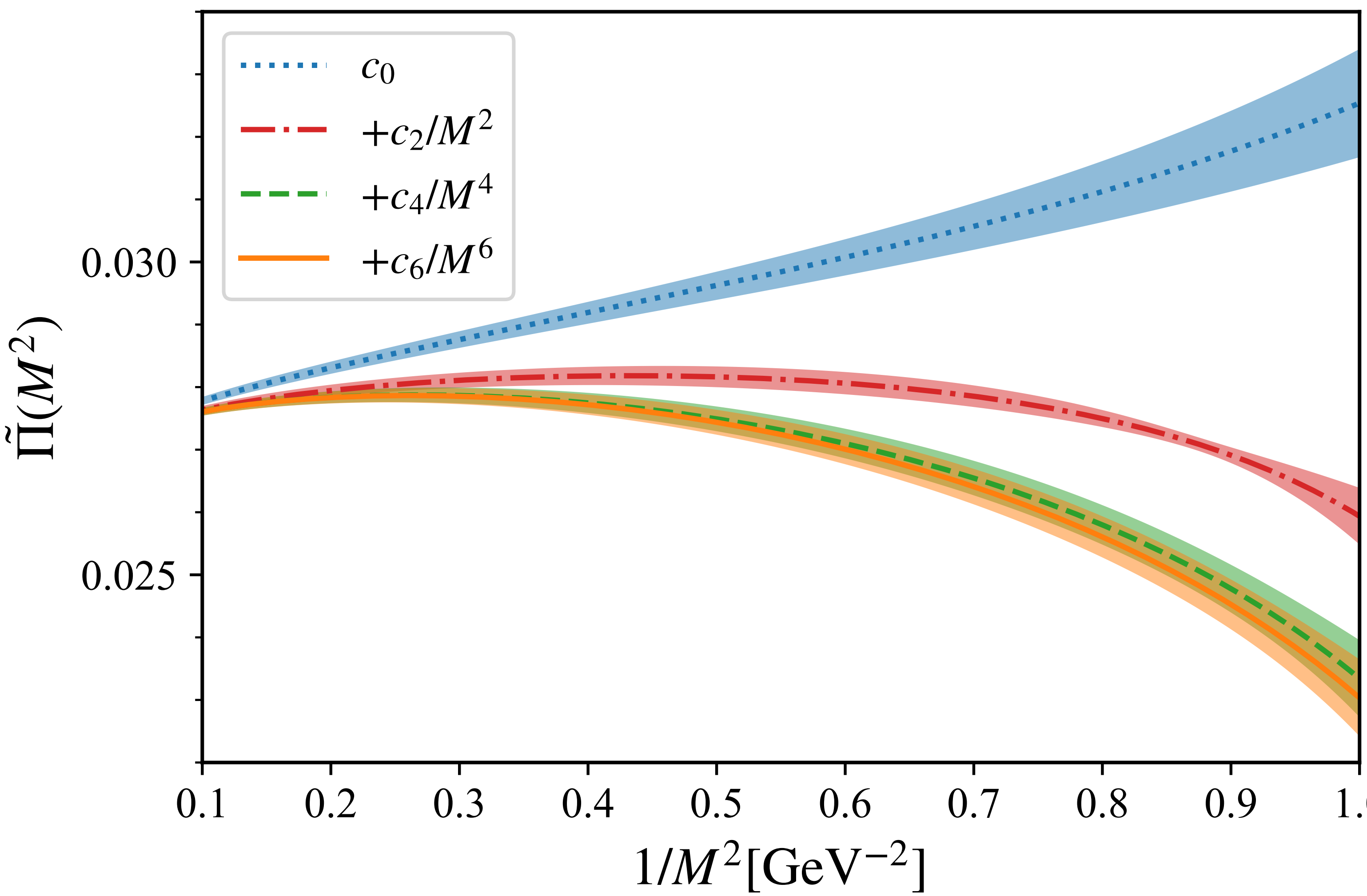
$$\tilde{\Pi}^{\mathrm{OPE}}(M^2) = \frac{1}{4\pi^2}\left(1+\frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi}\right) - \frac{3}{2\pi^2}\frac{m^2}{M^2}$$

$$+\frac{1}{12}\frac{\langle 0|\frac{\alpha_s}{\pi}G^2|0\rangle}{M^4} + \frac{2m\langle 0|\bar{q}q|0\rangle}{M^4} - \frac{112\pi\alpha_s(\mu^2)}{81}\frac{\langle 0|\bar{q}q|0\rangle^2}{M^6}$$

これより高次の項は階乗で抑制される

OPEの質量次元ごとの比較

input
$\mu^2 = M^2 e^{-\gamma_E}$
$m_s(2\ \mathrm{GeV}) = 0.0920(11)\ \mathrm{GeV}$
$\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}^{n_f=3} = 0.332(17)\ \mathrm{GeV}$
$\langle \bar{s}s \rangle = (0.272(5)\ \mathrm{GeV})^3$



摂動 $O(\alpha_s^4)$

$+\frac{m_s^2}{M^2}$

$+\frac{m_s^4}{M^4}, \frac{m_s\langle \bar{s}s \rangle}{M^4}, \frac{\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle}{M^4}$

$+\frac{m_s^6}{M^6}, \frac{\langle \bar{s}s\bar{s}s \rangle}{M^6}, \frac{m_s^2 \langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle}{M^6}$

スペクトル和の計算手法

転送行列展開（1）

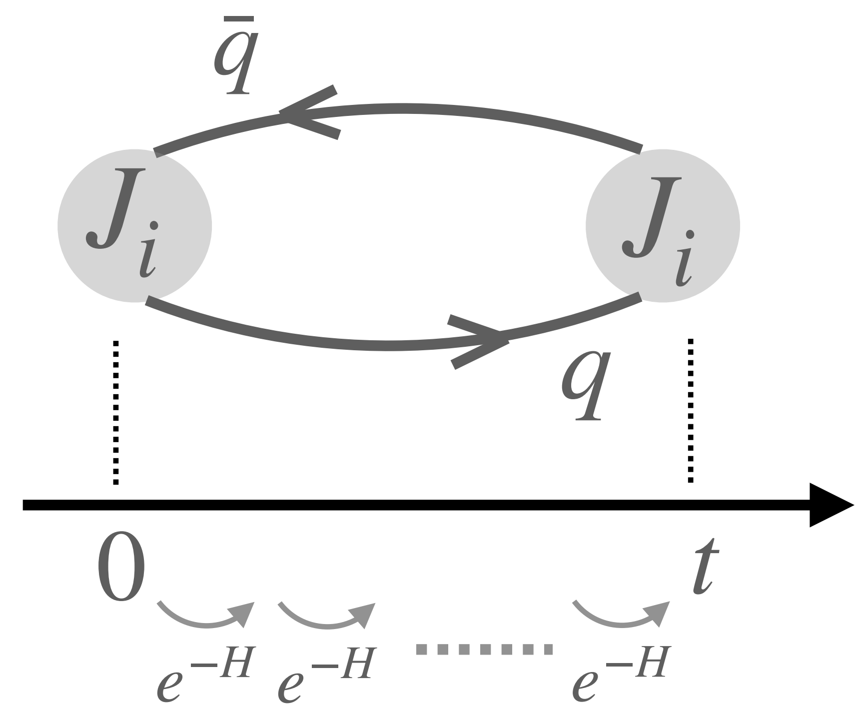
格子QCDによる $\tilde{\Pi}(M^2)$ の計算は非自明

◆ カレント-カレント相関関数

$$C(t) = \langle J_i(t) J_i(0) \rangle = \int d\omega\ e^{-\omega t} \omega^2 \rho(\omega^2)$$

$(\omega^2 = s)$

からスペクトル関数を求めるのは
不良設定逆問題



[G. Bailas, S. Hashimoto, TI, PTEP2020 043B07]

転送行列 e^{-H} による展開により直接スペクトル和を計算

$$C(t=n) = \langle J_i | (e^{-H})^n | J_i \rangle,\ \rho(\omega^2) = \langle J_i | \delta(\omega - H) | J_i \rangle$$

$$\tilde{\Pi}(M^2) = \frac{1}{M^2} \int ds\, e^{-s/M^2} \rho(s) = \sum_n a_n(M^2) \langle J_i | (e^{-H})^n | J_i \rangle$$

$e^{-\omega}$で展開

転送行列展開（2）

展開の係数の決め方

Chebyshev展開 ← 直交多項式展開の一種

$$\boxed{\tilde{\Pi}(M^2) \simeq \frac{c_0^*(M^2)}{2}C(0) + \sum_{j=1}^{N} c_j^*(M^2)\langle T_j^*(e^{-H})\rangle}$$

$c_j^*(M^2)$は関数 $\dfrac{2}{M^2\omega}e^{-\omega^2/M^2}$ のChebyshev展開によって決まる

(shifted) Chebyshev多項式

$$T_1^*(x) = 2x - 1,\ T_2^*(x) = 8x^2 - 8x + 1, \cdots$$

$$\langle T_1^*(e^{-H})\rangle = 2\underline{C(1)} - \underline{C(0)},\ \langle T_2^*(e^{-H})\rangle = 8\underline{C(2)} - 8\underline{C(1)} + \underline{C(0)}, \cdots$$

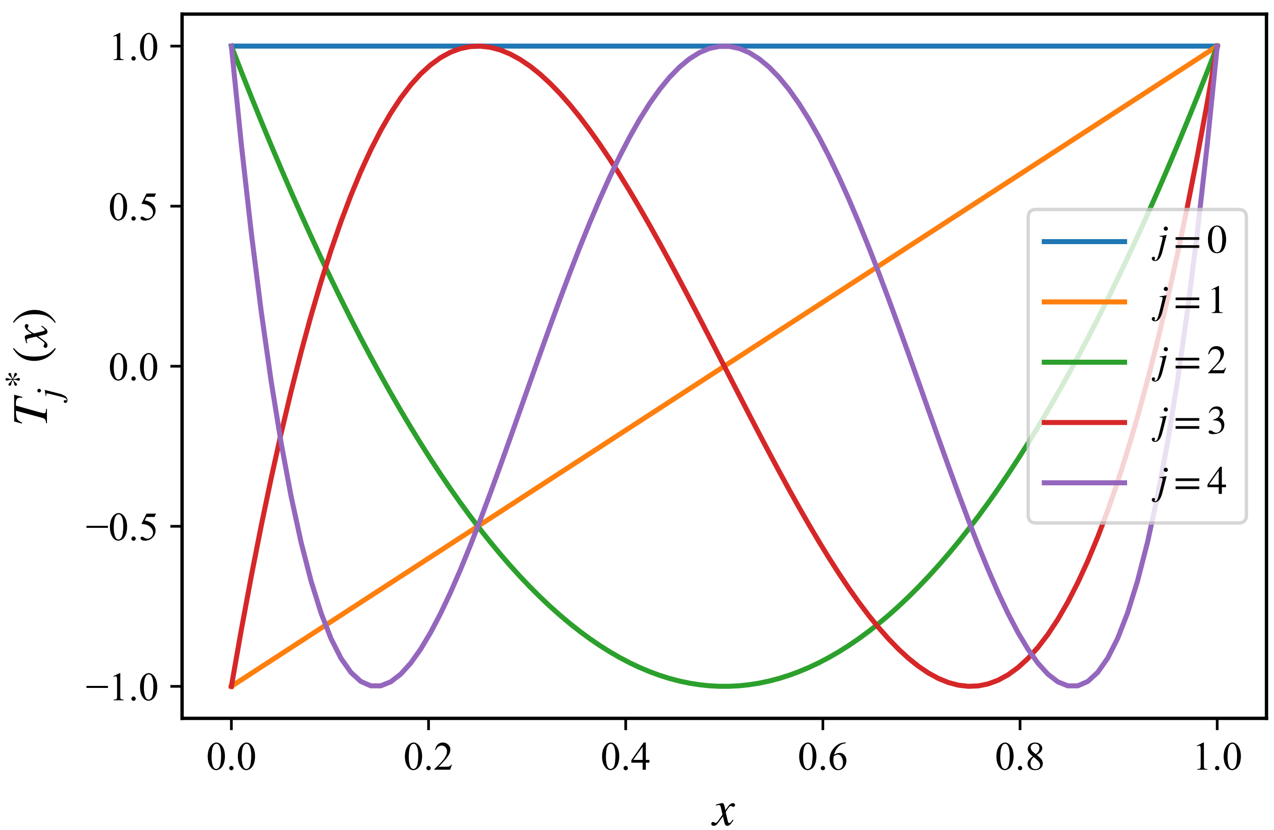
$x^n \longrightarrow C(n)$ 格子シミュレーションによる相関関数

チェビシェフ展開

$$f(x) \simeq \frac{c_0^*}{2} + \sum_{j=1} c_j^* T_j^*(x) \qquad c_j^* = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} f(x) T_j^*(x)$$

- 直交性

$$\delta_{jk} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} T_j^*(x) T_k^*(x)$$



本研究での応用

$$x = e^{-\omega}$$

x	$0 \to 1$
ω	$\infty \to 0$

$$f = \frac{2}{M^2\omega} e^{-\omega^2/M^2}$$

$\omega \to 0$ で発散

カットオフ

$$f = \frac{2}{M^2\omega} e^{-\omega^2/M^2} \tanh(\omega/\omega_0)$$

カットオフ関数

重み関数に$\tanh(\omega/\omega_0)$を導入してもスペクトル和を（ほぼ）変えない

$$\tilde{\Pi}(M^2) = \int d\omega \, \frac{2}{M^2} e^{-\omega^2/M^2} \omega\rho(\omega^2)$$

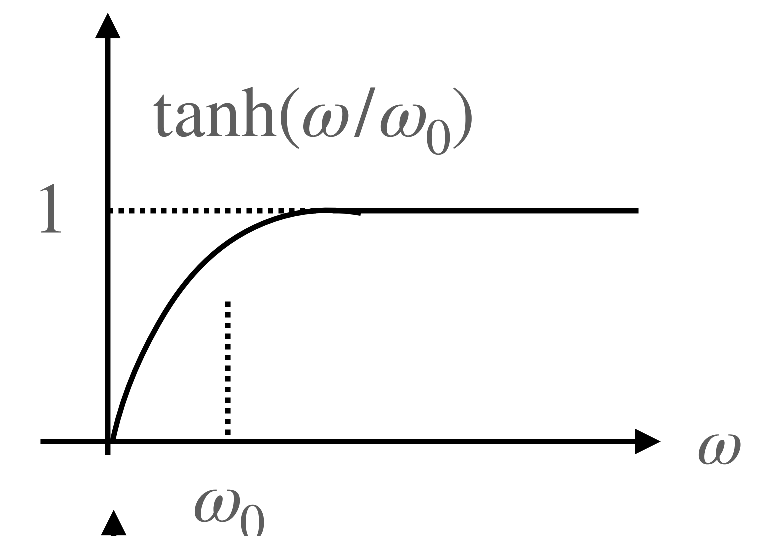
$$= \int d\omega \, \left\{ c_0^*(M^2) + \sum c_j^*(M^2) T_j^*(e^{-\omega}) \right\} \omega^2 \rho(\omega^2)$$

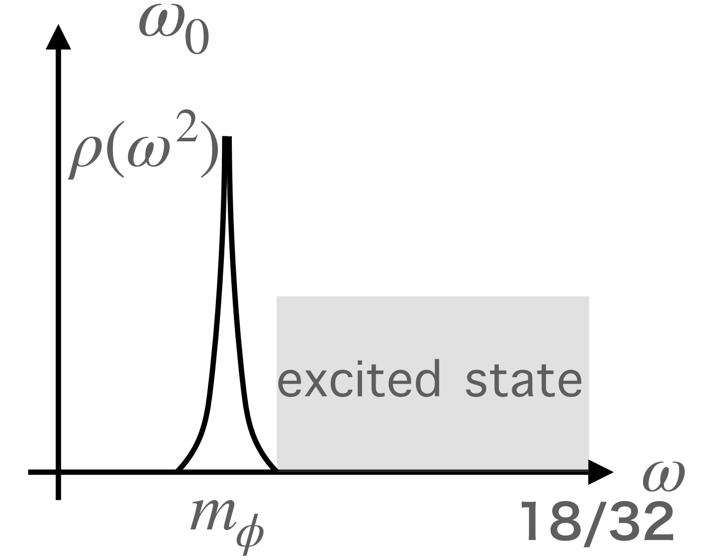
- 低エネルギー側

$$\rho(\omega^2) = 0 \text{ at } \omega \sim 0$$

- 高エネルギー側

$$\tanh(\omega/\omega_0) = 1 \text{ at } \omega \gg \omega_0$$





Setup

- JLQCD ensemble

  Nf = 2+1 Möbius domain-wall fermion

β	a^{-1}[GeV]	$L^3 \times T(\times L_5)$	#meas	am_{ud}	am_s
4.17	2.453(4)	$32^3 \times 64\ (\times 12)$	800	0.007	0.04
4.35	3.610(9)	$48^3 \times 96\ (\times 8)$	600	0.0042	0.025
4.47	4.496(9)	$64^3 \times 96\ (\times 8)$	400	0.0030	0.015

計算コストや統計誤差を小さくするため s クォークを用いる

- $J_i = \bar{s}\gamma_i s$

基底状態: ϕ 中間子

- $m_\phi \sim 1\ \mathrm{GeV}$

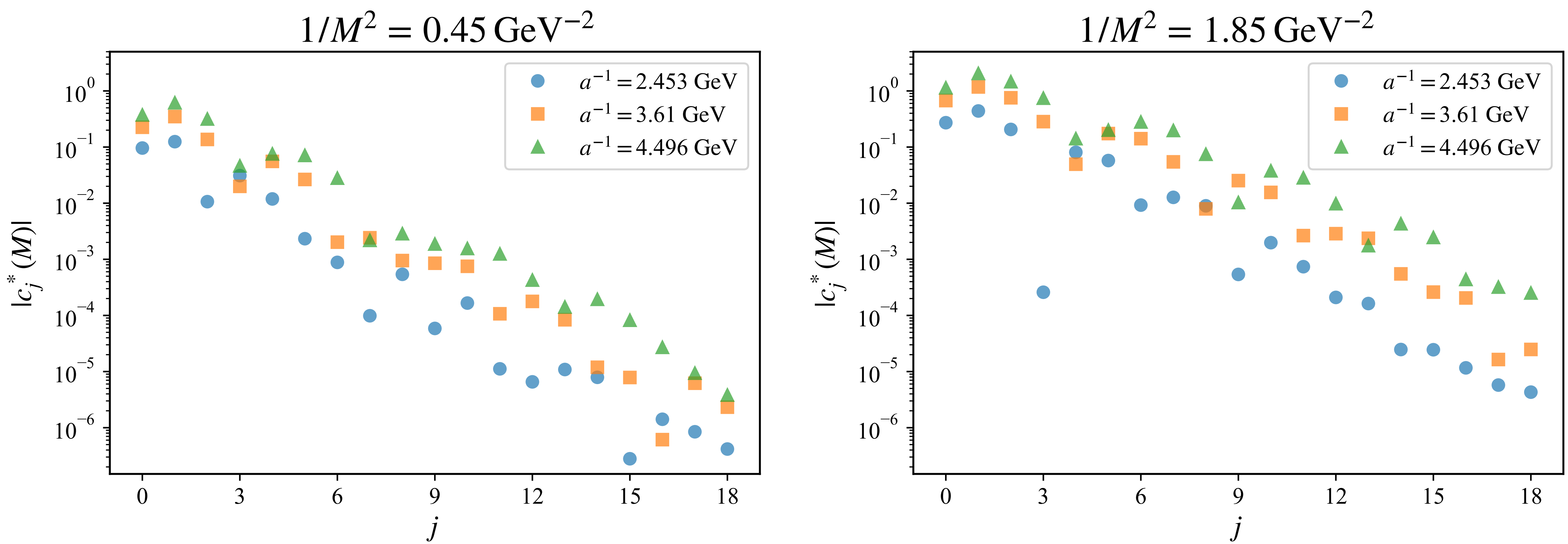
s クォークの質量は、ほぼ物理的な値

結果

Chebyshev展開のテスト1

$|T_j^*(x)| \le 1$ なので $c_j^*(M^2)$ の大きさから収束を見ることができる

$$\frac{2}{M^2\omega}e^{-\omega^2/M^2}\tanh(\omega/\omega_0) \simeq \frac{c_0^*(M^2)}{2} + \sum_{j=1}^{N} c_j^*(M^2)T_j^*(e^{-\omega})$$



係数は指数関数的に減衰、$j = 18$ で十分小さい

Chebyshev展開のテスト2

シングルexpの相関関数からスペクトル和を計算

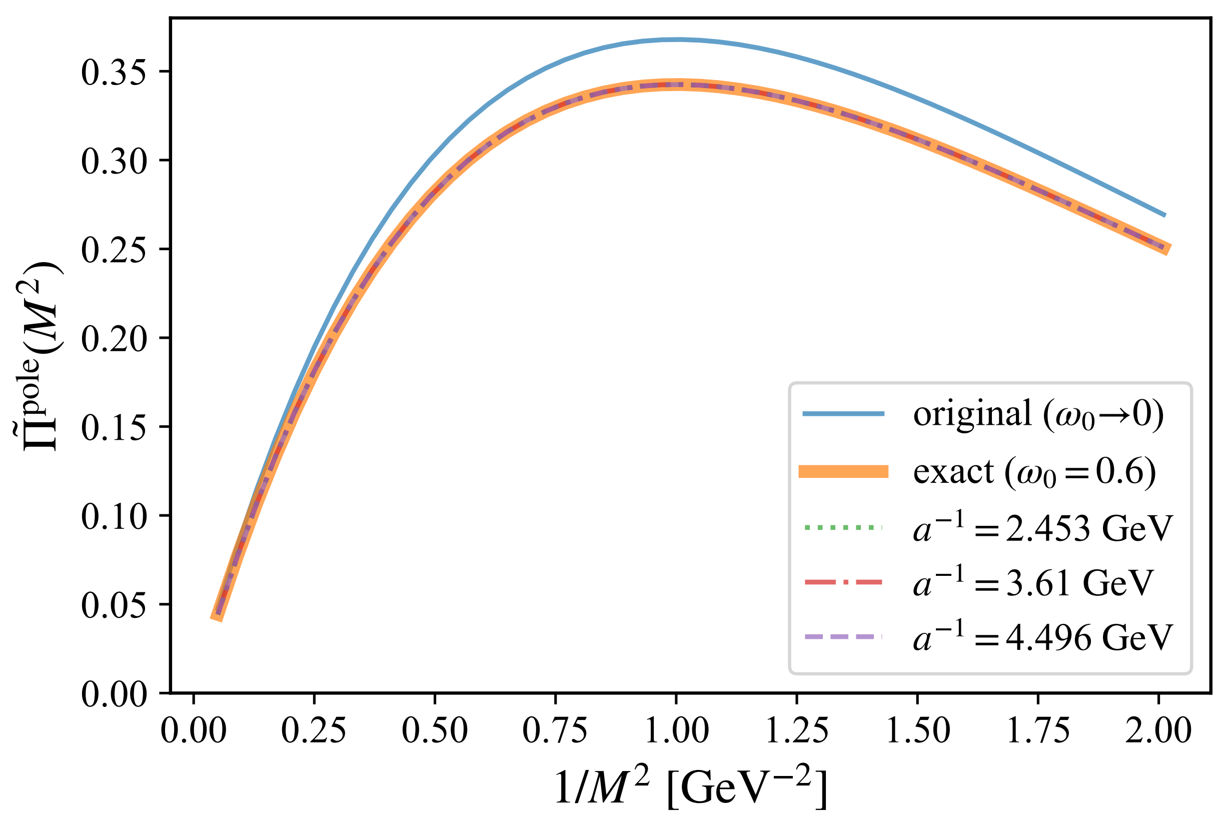
$$\rho(\omega^2) = f^2\delta(\omega^2 - m^2)$$

$$C(t) = \frac{f^2 m}{2} e^{-mt}$$

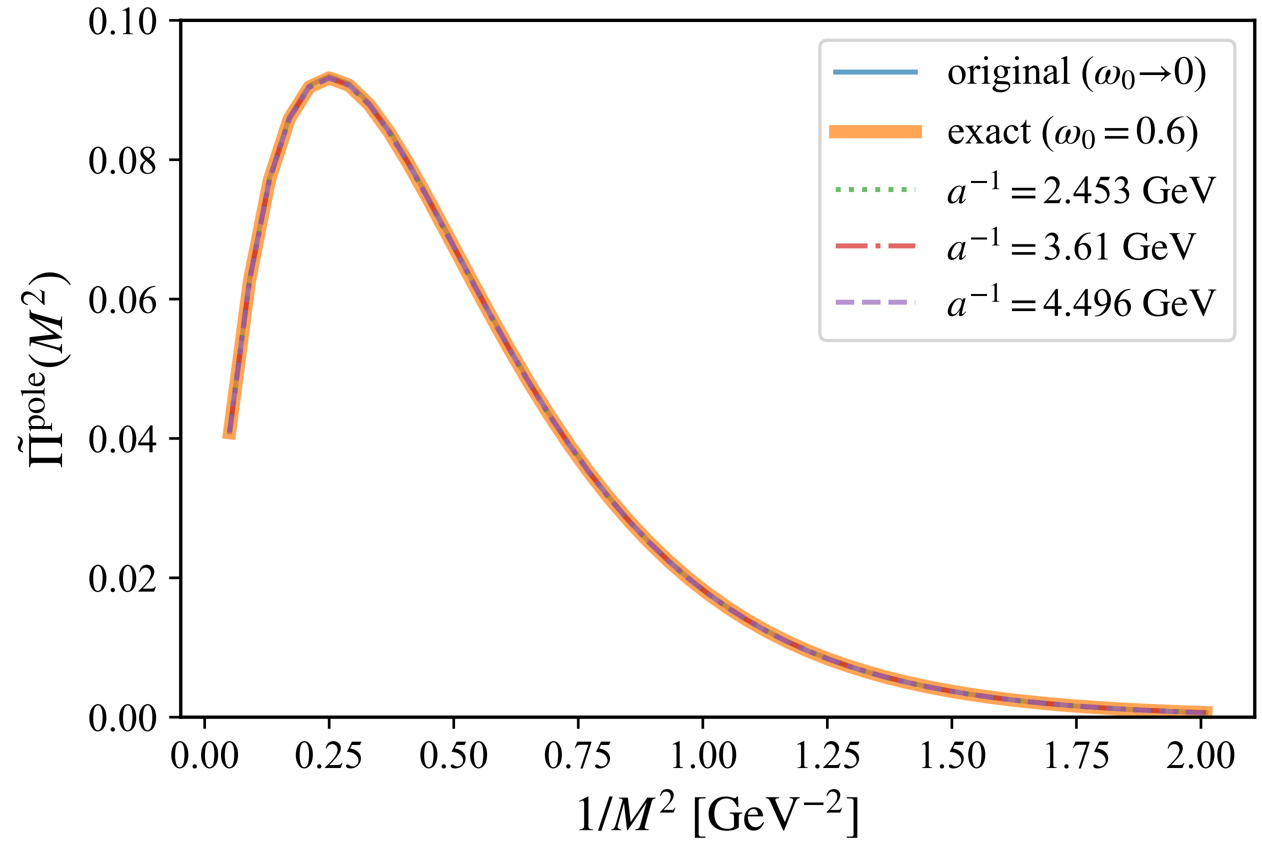
$$\tilde{\Pi}(M^2) = \frac{f^2}{M^2} e^{-m^2/M^2} \tanh(\omega/\omega_0)$$

$$\simeq c_0^*(M^2) + \sum c_j^*(M^2)\langle T_j^*(e^{-m})\rangle$$

$m = 1\ \mathrm{GeV}, \omega_0 = 0.6\ \mathrm{GeV}$



$m = 2\ \mathrm{GeV}, \omega_0 = 0.6\ \mathrm{GeV}$



OK

$$\tilde{\Pi}(M^2) \simeq \frac{c_0^*(M^2)}{2} C(0) + \sum_{j=1}^{N} c_j^*(M^2) \langle T_j^*(e^{-H}) \rangle$$

格子計算と組み合わせる

$$\langle T_1^*(e^{-H}) \rangle = 2C(1) - C(0),\ \langle T_2^*(e^{-H}) \rangle = 8C(2) - 8C(1) + C(0), \cdots$$

低エネルギーのカットに対する補正

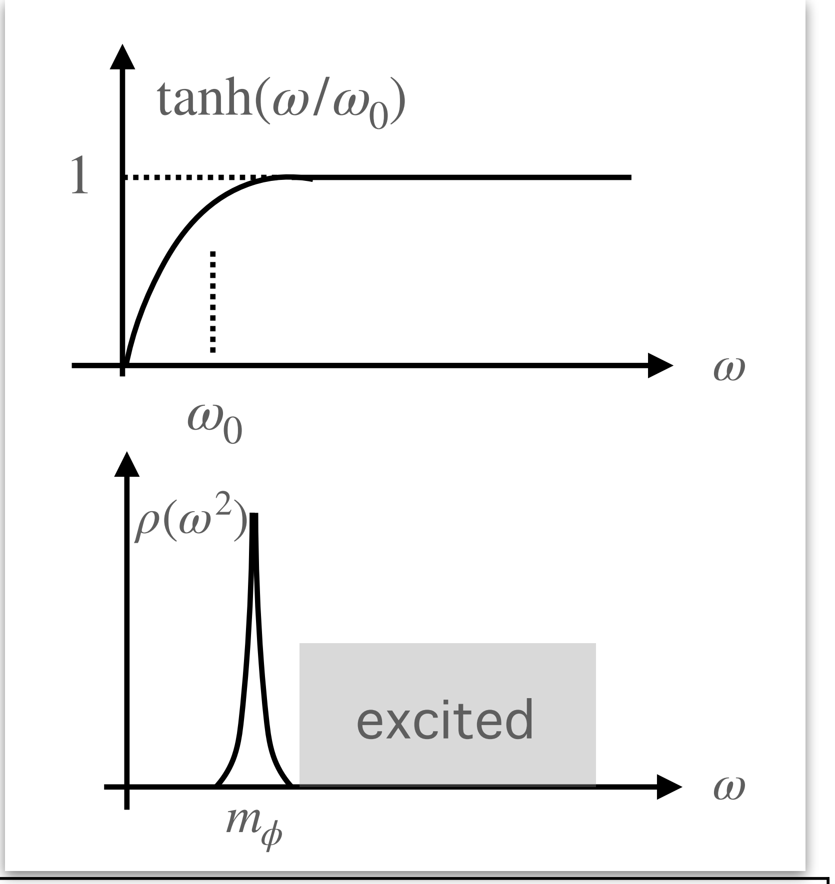
欠けてしまった分を足し戻す

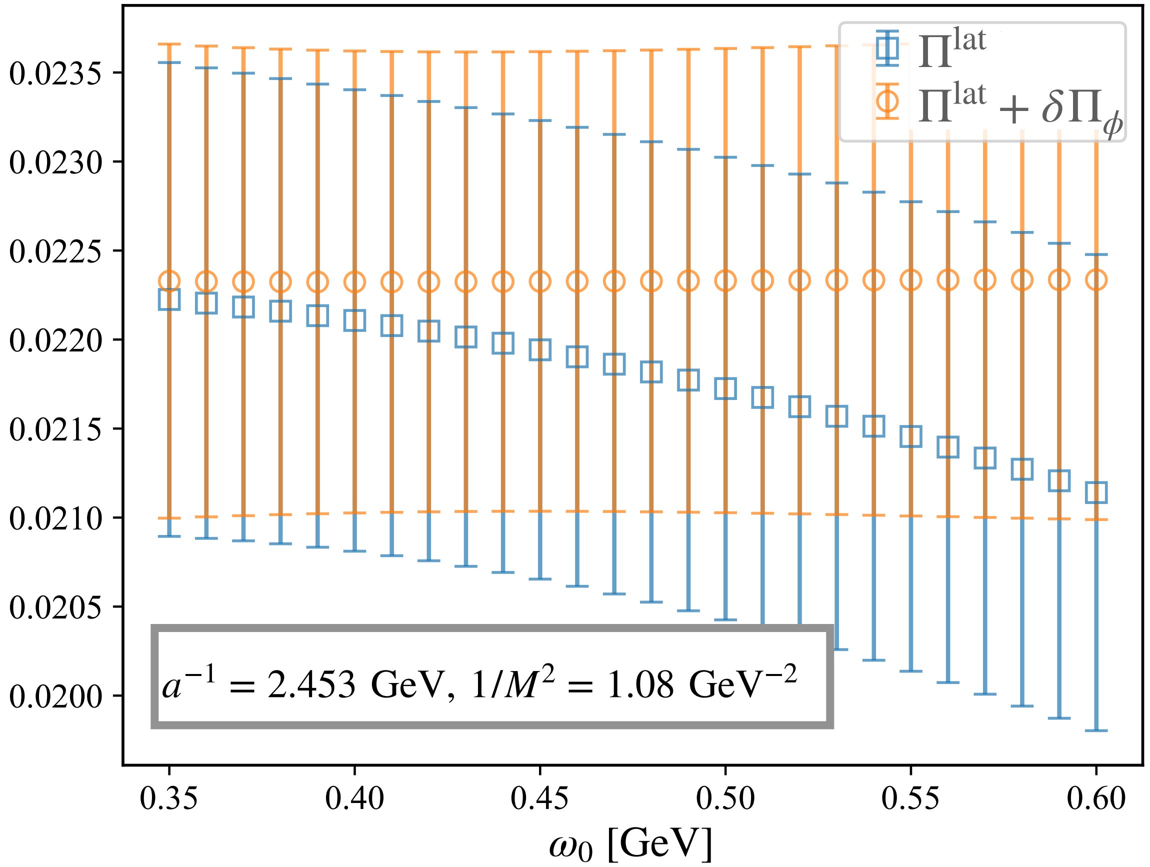
$$\delta\Pi_\phi := f_\phi^2 e^{-m_\phi^2/M^2}(1 - \tanh(m_\phi/\omega_0))$$

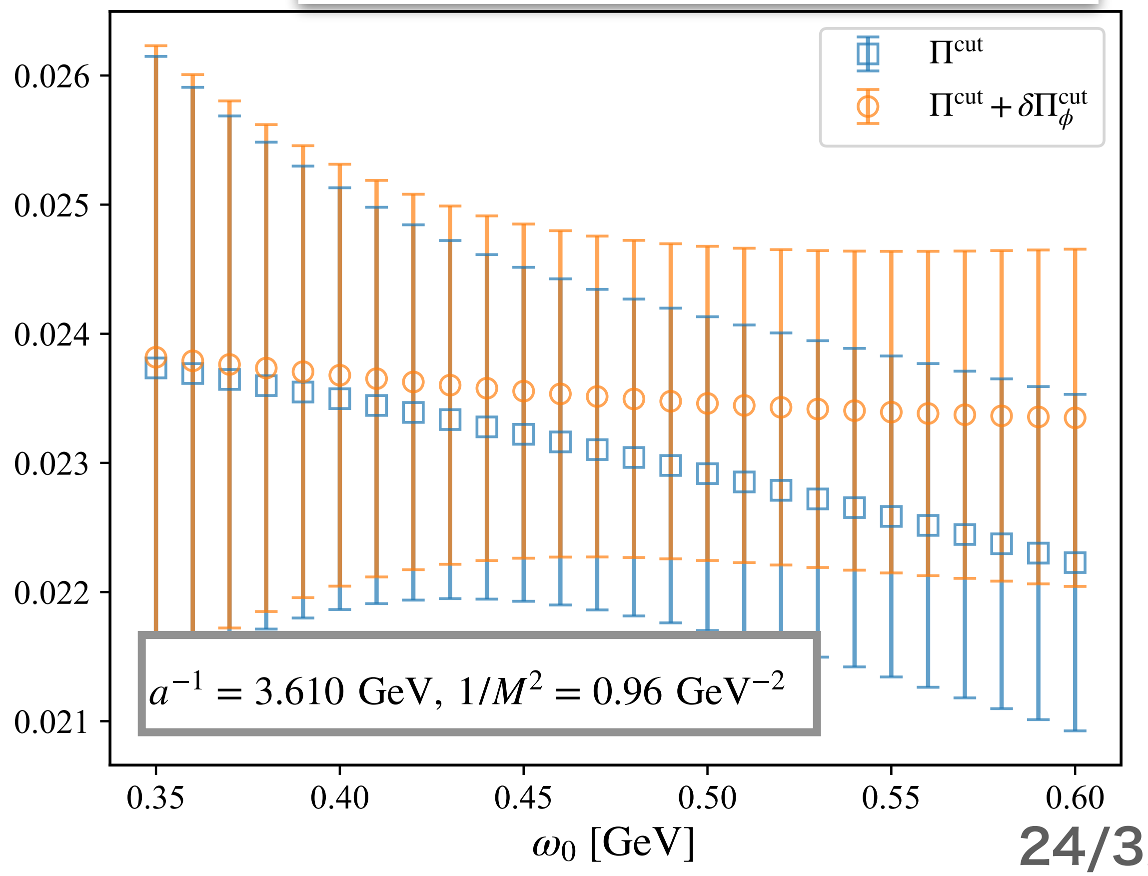
▶ **結果は ω_0 の依らなくなる**

$$\Pi_\phi(M^2) = f_\phi^2 e^{-m_\phi^2/M^2}$$

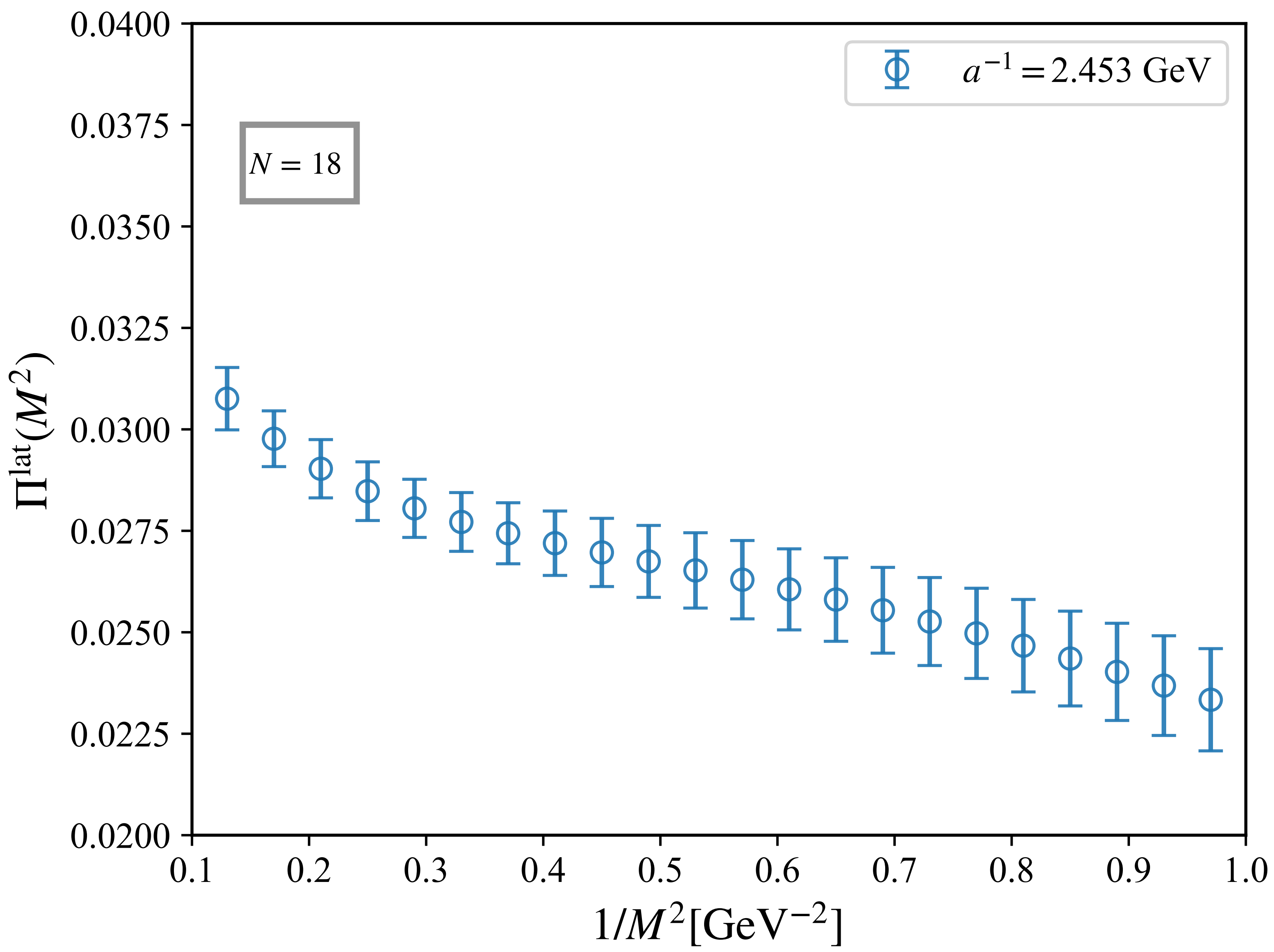
$$\Pi_\phi^{\text{cut}}(M^2) = f_\phi^2 e^{-m_\phi^2/M^2}\boxed{\tanh(m_\phi/\omega_0)}$$





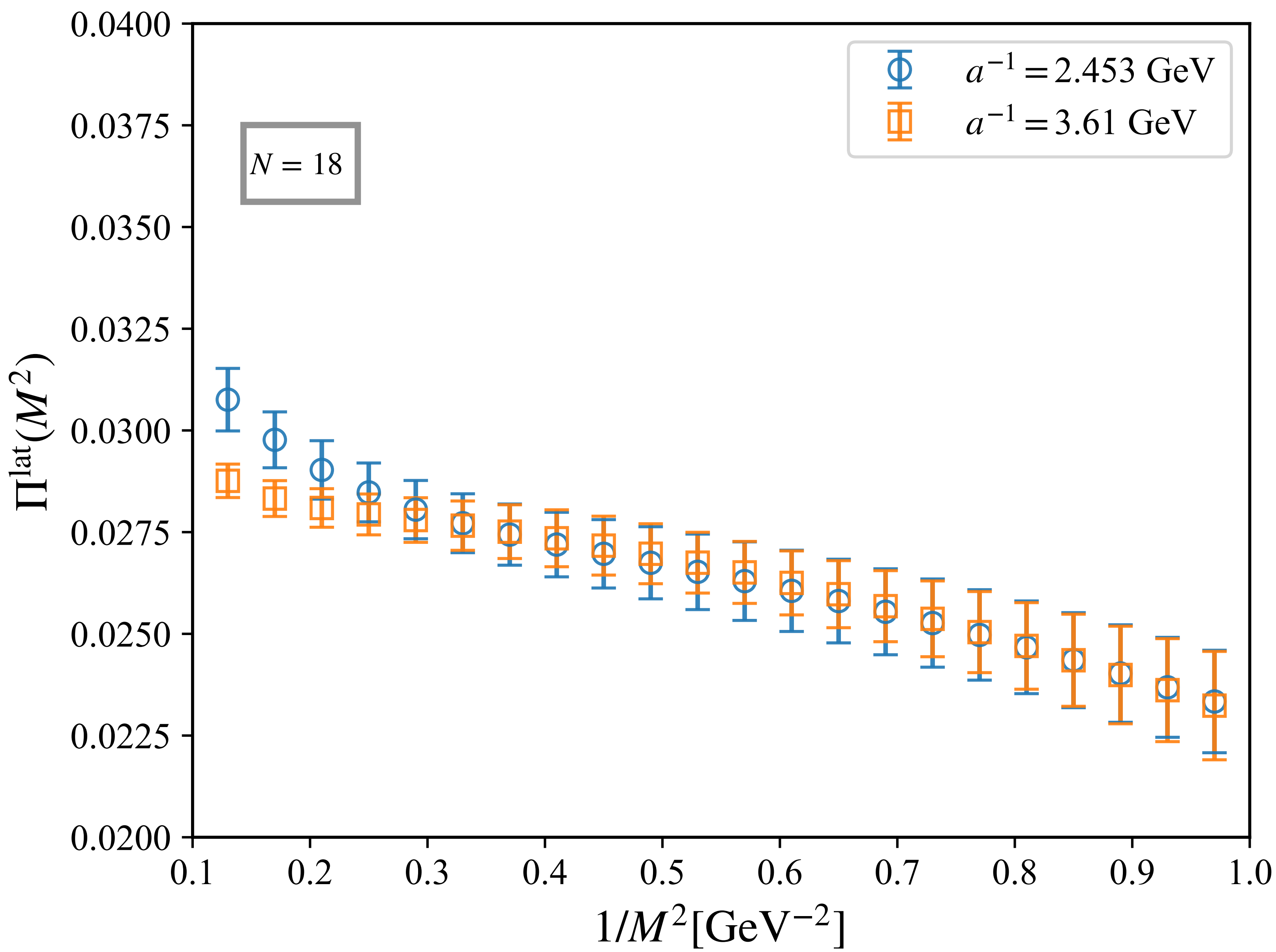


格子QCDによる結果

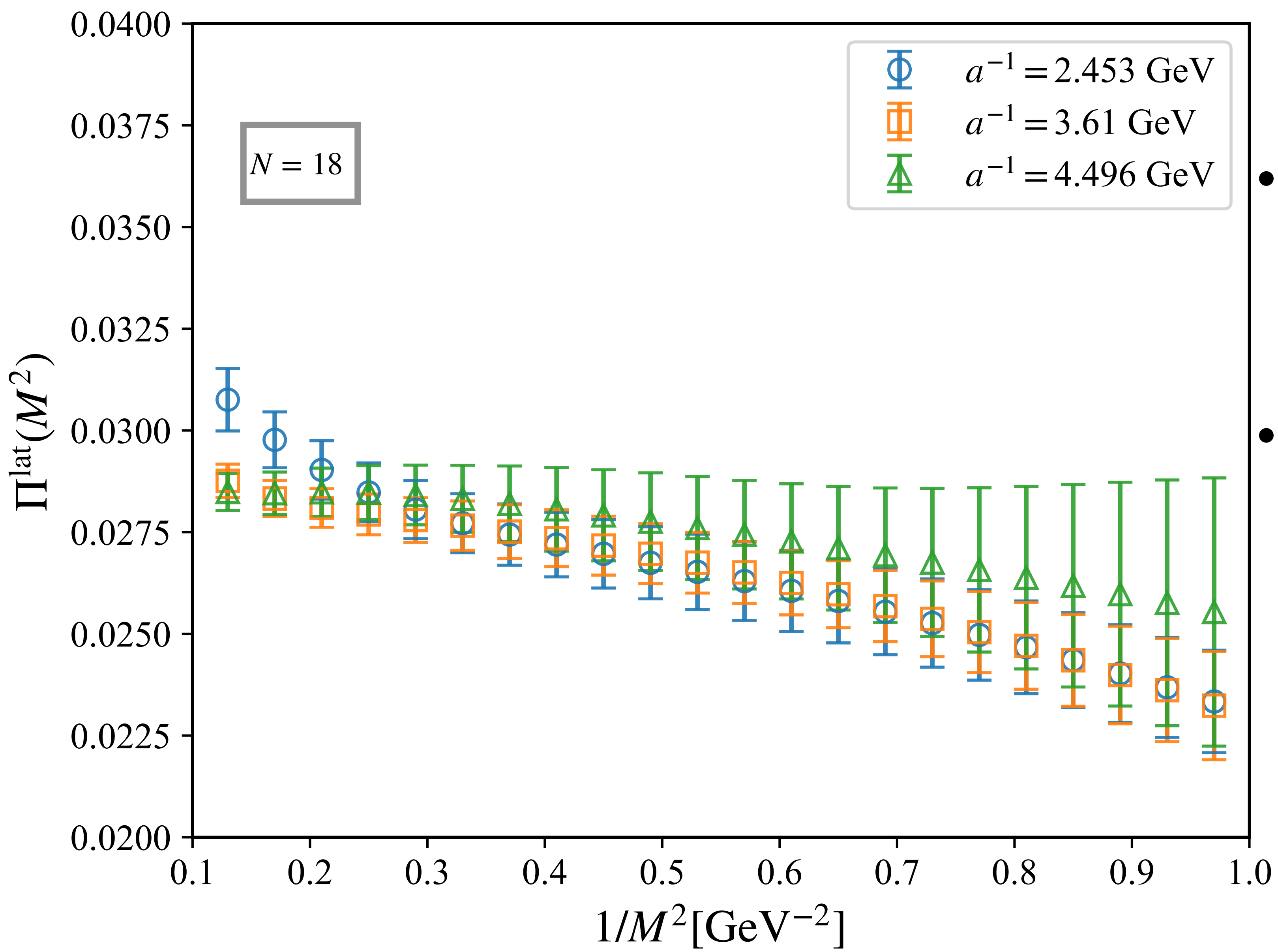


0.0400
0.0375
0.0350
0.0325
0.0300
0.0275
0.0250
0.0225
0.0200
$\Pi^{\mathrm{lat}}(M^2)$
$N = 18$
$a^{-1} = 2.453$ GeV
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
$1/M^2[\mathrm{GeV}^{-2}]$

格子QCDによる結果


$N = 18$
$a^{-1} = 2.453$ GeV
$a^{-1} = 3.61$ GeV
$\Pi^{\mathrm{lat}}(M^2)$
$1/M^2[\mathrm{GeV}^{-2}]$
0.0400
0.0375
0.0350
0.0325
0.0300
0.0275
0.0250
0.0225
0.0200
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0

格子QCDによる結果



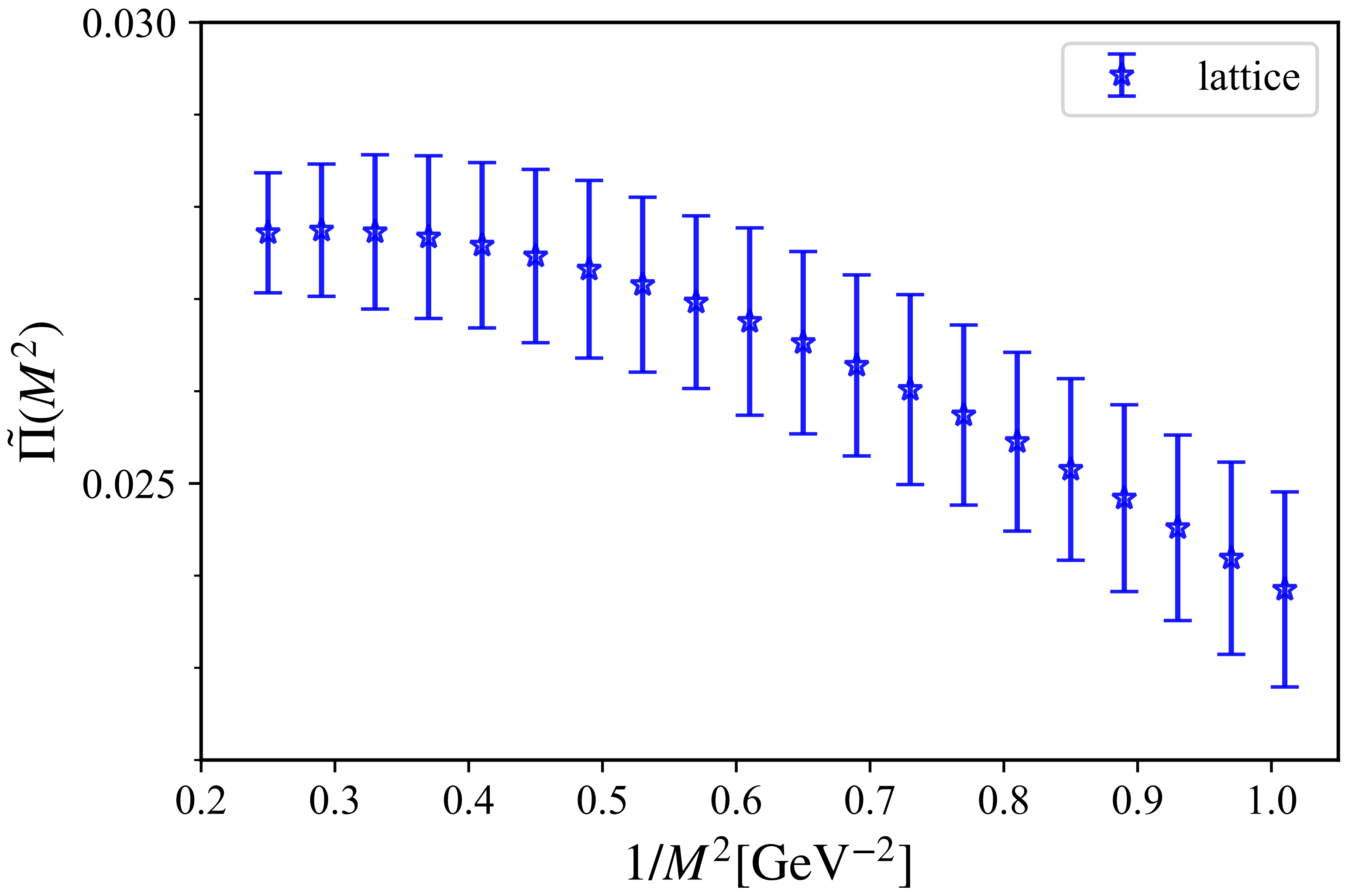
- $\tilde{\Pi}^{\mathrm{lat}}(M^2)$ はくりこまれていて、$\overline{\mathrm{MS}}$にマッチング済み

  X-space method [Tomii et al., 2016]

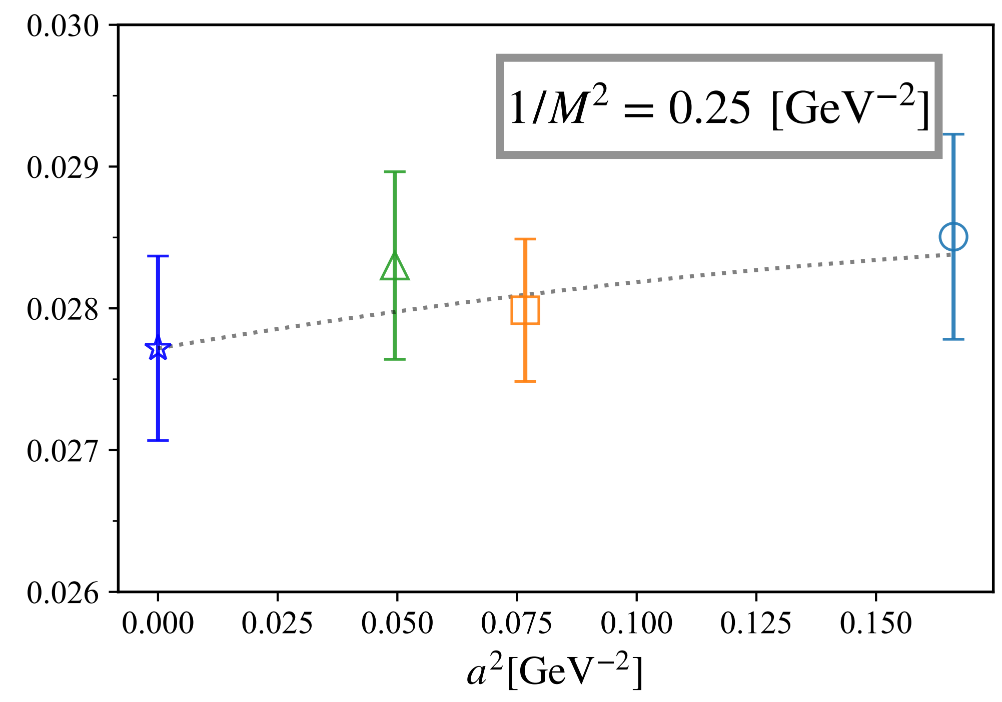
- 離散化誤差は小さい

連続極限

$$\Pi^{\mathrm{lat}}(M^2) = \Pi^{\mathrm{cont}}(M^2)(1 + b_0 M^2 a^2)(1 + b_1 \Lambda^2 a^2)$$

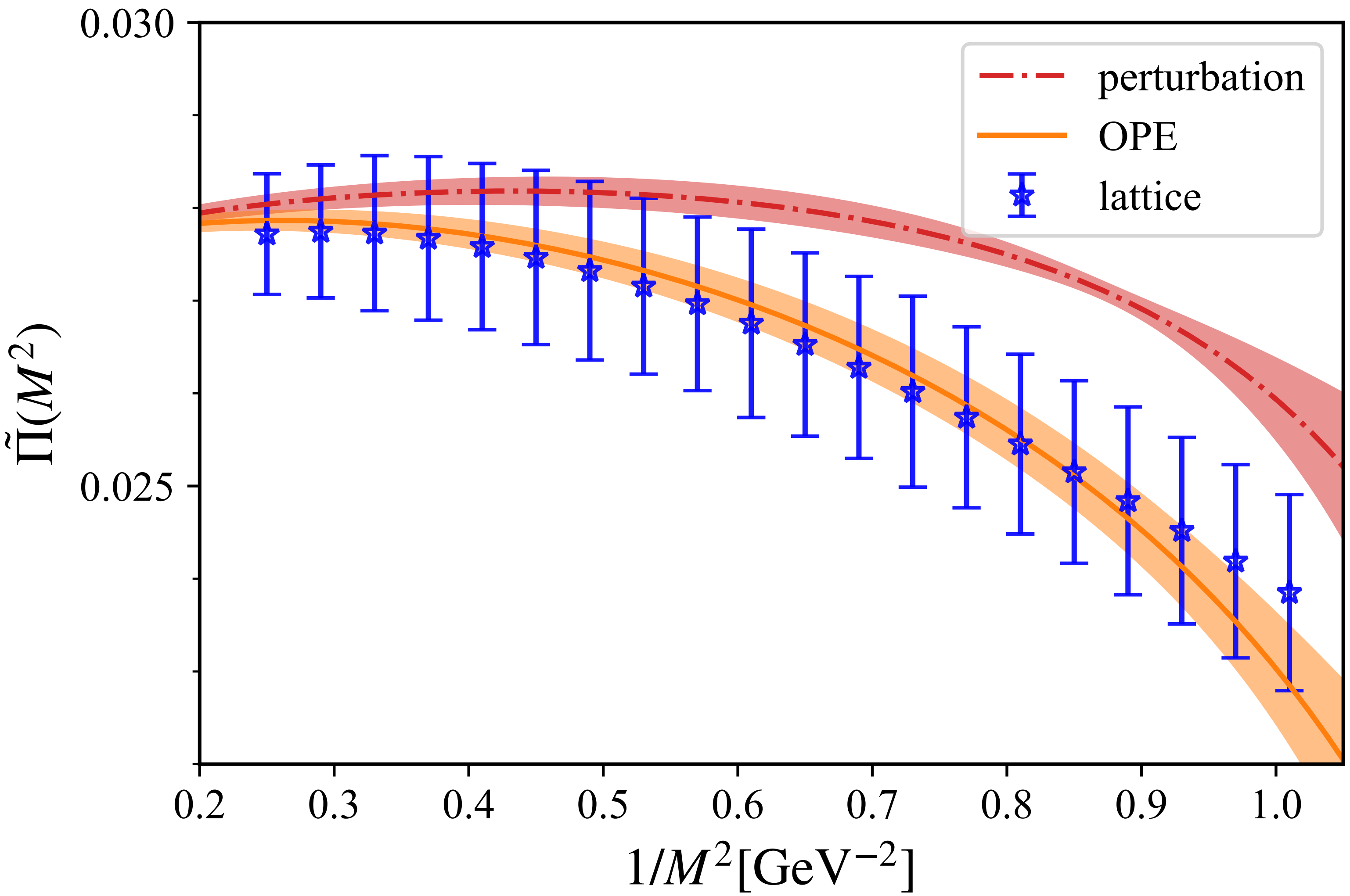


M^2 に依存した離散化誤差も
考慮して $a \to 0$ 極限をとる



摂動+OPEとの比較

$$\tilde{\Pi}^{\mathrm{OPE}}(M^2) = \sum_{i=0}^{4} c_i(M^2)\alpha_s^i + \frac{m_s^2}{M^2}c_s(\alpha_s) + \frac{m_s\langle\bar{s}s\rangle}{M^3}c_{\bar{s}s}(\alpha_s) + \frac{\langle\frac{\alpha_s}{\pi}G^2\rangle}{M^4}c_{G^2}(\alpha_s) + \cdots$$



- 摂動は $O(\alpha_s^4) + O(m_s^2, m_s^2\alpha_s)$ まで
- OPE は次元 6 の凝縮まで

input
$\mu^2 = M^2 e^{-\gamma_E}$
$m_s(2\ \mathrm{GeV}) = 0.0920(11)\ \mathrm{GeV}$
$\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}^{n_f=3} = 0.332(17)\ \mathrm{GeV}$
$\langle\bar{s}s\rangle = (0.272(5)\ \mathrm{GeV})^3$

次元 4 の係数の決定

$$\tilde{\Pi}(M^2) = \sum_{i=0}^{4} c_i(M^2)\alpha_s^i + \frac{m_s^2}{M^2}c_s(\alpha_s) + \boxed{\frac{c_4}{M^4}}$$ ← フィット

$0.25 \leq 1/M^2\,[\mathrm{GeV}^{-2}] \leq 0.69$の範囲でフィット

▷ $c_4 = -0.32(9) \times 10^{-2}\,\mathrm{GeV}^4$

カイラル凝縮の寄与を差し引くことでグルーオン凝縮を推定

▷ $\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle = 0.6(1.0) \times 10^{-2}\,\mathrm{GeV}^4$ 　括弧内は統計誤差のみ

- 現象論と同程度の精度
- より精密な決定には、高い統計と高次の摂動計算が必要

	$\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle \times 10^2[\mathrm{GeV}^4]$
[SVZ, 79]	$1.20(36)$
[Geshkenbein et al, 01]	$0.6(1.2)$
[Davier et al, 14]	$-3.4 \sim -0.5$

まとめと展望

- QCD sum rule に現れる HVP の Borel 変換を格子 QCD の相関関数から計算した。

- 本研究は QCD sum rule と格子 QCDを結びつけることができる。スケールが中間的な領域で、格子計算から摂動 QCD ・OPE の検証を行い、一致する結果を得た。

- 格子・連続理論の両方でよく計算できるため QCD のパラメータ決定に応用できる。別のチャネルでの計算はパラメータ決定に有用。
    - $V+A$: 摂動的効果に感度
    - $V-A$: 質量項や非摂動的効果に感度

タウ粒子のハドロン的崩壊

$$R_\tau = \frac{\Gamma(\tau \to \nu_\tau + \text{hadrons})}{\Gamma(\tau \to \nu_\tau e^- \bar{\nu}_e)}$$

$$\propto \int_0^{m_\tau^2} \frac{ds}{m_\tau^2} \left(1 - \frac{s}{m_\tau^2}\right)^2 \left[\left(1 + \frac{2s}{m_\tau^2}\right)\rho^{(1)}(s) + \rho^{(0)}(s)\right]$$

- $\rho^{(J)}(s)$: スピンJのハドロンのスペクトル関数
- 崩壊比はスペクトル和で書ける
- VとAの相関関数を計算すれば良い